

T. 266

Bizonyítsd be, hogy ha $0 < a < b < c < d$, akkor az $x^4 + bx + c = 0$ és az $x^4 + ax + d = 0$ egyenleteknek nincs közös gyöke!

Megoldás. Egy egyenlet gyöke, más néven megoldása, olyan szám, amely kielégíti az egyenletet. Tegyük fel, hogy létezik olyan y , amely mindkettő egyenletet teljesíti: $y^4 + by + c = 0$ és $y^4 + ay + d = 0$. Ekkor a kettőt egymásból kivonva kapjuk, hogy $by + c - (ay + d) = 0$, ahonnan $by - ay = d - c$, azaz $y = \frac{d - c}{b - a}$. De ekkor mivel $0 < a < b < c < d$, ezért $y > 0$ kell legyen. De viszont ekkor $y^4 + by + c > 0$, ami ellentmondás. A két egyenletnek így nem lehet közös gyöke.