T. 242

Az a, b *és* n *természetes számok olyanok, hogy* $a^{96}+b^{96}$ *és* $a^{100}+b^{100}$ *is osztható* n*-nel. Bizonyítsd be, hogy* $a^{1996}+b^{1996}$ *is osztható* n*-nel!*

Megoldás. Ha *a* vagy *b* nulla, akkor az állítás nyilván igaz. Ezért feltehetjük, hogy *a* és *b*, így ezzel *n* is pozitív egész szám.

Legyen *a* és *b* legnagyobb közös osztója *d*, majd legyen $a=d\cdot x$ és $b=d\cdot y$, ahol *x* és *y* relatív prím pozitív egész számok. Ezután legyen *n* és d^{100} legnagyobb közös osztója *m*, ezzel $n=m\cdot k$ és $d^{100}=m\cdot d'$ alakú: itt *k* és *d'* relatív prím pozitív egész számok. A feltételekből következik, hogy $n=m\cdot k$ osztója a következő két számnak:

$$d^4\cdot\left(a^{96}+b^{96}\right)=d^{100}\cdot\left(x^{96}+y^{96}\right)=m\cdot d'\cdot\left(x^{96}+y^{96}\right),$$
$$a^{100}+b^{100}=d^{100}\cdot\left(x^{100}+y^{100}\right)=m\cdot d'\cdot\left(x^{100}+y^{100}\right).$$

Következményképpen *k* osztja $x^{96}+y^{96}$ és $x^{100}+y^{100}$ számok *d'*-szeresét, amiből *k* és *d'* relatív prím lévén adódik, hogy $x^{96}+y^{96}$ és $x^{100}+y^{100}$ osztható *k*-val.

Tegyük fel, hogy *k* rendelkezik *p* páratlan prímosztóval. Ekkor *p* osztja $x^{96}+y^{96}$ és $x^{100}+y^{100}$ számokat, amiért osztja a következő mennyiséget is:

$$x^{100}+y^{100}-y^4\cdot\left(x^{96}+y^{96}\right)=x^{100}-y^4\cdot x^{96}=x^{96}\cdot\left(x^4-y^4\right).$$

Ebből adódik, hogy *p* osztja a szorzat valamelyik tényezőjét.

Amennyiben *p* osztja x^{96}-t, osztja *x*-et, így kapjuk, hogy *p* y^{100}-nak is osztója, ahonnan *p* *y*-t is osztja. Ez azonban ellentmond annak, hogy *x* és *y* relatív prímek, hisz lett közös prímosztójuk. Ha pedig *p* az x^4-y^4 osztója, akkor x^4 és y^4 ugyanannyi maradékot ad *p*-vel osztva, így hatványaik is ugyanannyi maradékot adnak *p*-vel osztva. Emiatt például x^{100} és y^{100} maradéka is azonos, így kapjuk, hogy $x^{100}+y^{100}$ maradéka és $2\cdot x^{100}$ maradéka is megegyezik *p*-vel osztva. Mivel előbbi maradéka nulla, így utóbbi is *p*-vel osztható, ami lehetetlen, hisz tudjuk, hogy *p* az *x*-hez relatív prím, továbbá páratlan is.

Kaptuk, hogy *k*-nak nincs páratlan prímosztója, azaz kettőhatvány. Ha *x* és *y* ellentétes paritású, akkor $x^{96}+y^{96}$ páratlan, így *k* nem lehet páros, azaz *k*=1. Mivel *x* és *y* nem lehet egyszerre páros, így a másik eset, hogy *x* és *y* páratlan. Ez esetben, mivel a páratlan négyzetszámok 4-gyel osztva 1 maradékot adnak, így $x^{96}+y^{96}$ 4-es maradéka 2 lesz, így nem osztható 4-gyel. Ezzel *k* sem lehet 4-gyel osztható, így *k*=1 vagy *k*=2. Mindkettő esetben igaz lesz, hogy *k* az $x^{1996}+y^{1996}$ osztója lesz.

Most pedig mivel *m* osztja d^{100}-t, ezért d^{1996}-ot is. Ezt összevetve azzal, hogy *k* pedig $x^{1996}+y^{1996}$ osztója, adódik, hogy $n=m\cdot k$ osztója szorzatuknak, ami

$$d^{1996}\cdot\left(x^{1996}+y^{1996}\right)=(dx)^{1996}+(dy)^{1996}=a^{1996}+b^{1996}.$$

Ezt akartuk bizonyítani.