Pálmay Lóránt Matematikai Tehetségkutató Verseny
2024. január 11.

A feladatok megoldása

1. feladat. Anna vásárolni ment. 460 forintért vett kenyeret, vásárolt 1,5 kg banánt kilogrammonként 630 forintért, a sajtokért összesen 4284 forintot fizetett. Végül öt zsemlét is vett. Fizethetett-e az összes áruért pontosan 6000 forintot? (A zsömle darabonkénti ára egész forint.) **(6 pont)**

Megoldás:
A 1,5 kg banán $630 \cdot 1{,}5 = 945$ Ft-ba került.

1 pont

A zsemlén kívül a többi áruért összesen $460 + 945 + 4284 = 5689$ Ft-ot fizetett.

2 pont

Ha összesen 6000 Ft-ot fizetett volna, akkor az öt zsemle együtt $6000 - 5689 = 311$ Ft-be került volna.

1 pont*

Mivel a 311 nem osztható 5-tel, ezért (mivel a a zsemlék darabonkénti ára is egész forint) az öt zsemle nem kerülhetett ennyibe, vagyis nem fizethetett összesen 6000 Ft-ot.

2 pont

Összesen: 6 pont

**Megjegyzés: Ha a versenyző nem számítja ki ezt a konkrét számot, de később helyesen megindokolja, hogy ez a különbség miért nem osztható 5-tel, akkor is kapjon maximális pontszámot.*

2. feladat. Három vándor egy este egy fogadóba érkezett, pogácsát rendelt, de mire a pogácsák kisültek, a fáradtságtól elaludtak. A fogadós a megsült pogácsákat letette az asztalra.

- Felébredt az első vándor, megette a pogácsák harmadát és még egyet, majd elaludt.
- Felébredt a második is, megette a maradék pogácsák harmadát és még egyet, majd ő is visszaaludt.
- Felébredt a harmadik is, megette a megmaradt pogácsák harmadát és még egyet, majd elaludt.

Reggelre a tálban már csak 5 pogácsa maradt. Ehhez rendeltek még néhányat, így végül mindenki ugyanannyi pogácsát evett meg. Legalább hány pogácsát rendeltek reggel? **(8 pont)**

Megoldás:

Előbb meghatározzuk, hogy ki mennyi pogácsát evett meg reggelig:

Ha a harmadik vándor eggyel kevesebbet evett volna meg, akkor 6 db pogácsa lett volna a tálban, ez a maradék kétharmada, így $(6:2) \cdot 3 = 9$ dbpogácsa volt a tálban, mielőtt a harmadik vándor felébredt.

1 pont

Tehát a harmadik vándor $3 + 1 = 4$ db-ot evett meg.

1 pont

Ugyanezen gondolatmenet alapján a második vándor $(9 + 1): 2 \cdot 3 = 15$ db-ot talált a tálban,

1 pont

ezért ő $5 + 1 = 6$ db pogácsát evett.

1 pont

Hasonlóan az első vándor $(15 + 1): 2 \cdot 3 = 24$ db pogácsát talált, ennyit sütött összesen a fogadós.

1 pont

Az első vándor tehát $8 + 1 = 9$ db-ot evett.

1 pont

Ahhoz, hogy egyenlő számú pogácsát egyenek mind, mindenkinek legalább 9 db-ot kell ennie

1 pont

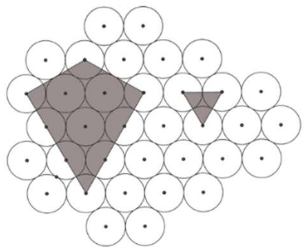
így még legalább $0 + 3 + 5 = 8$ pogácsának kell lennie a tálban, vagyis még legalább $8 - 5 = 3$ darabot kell rendelniük reggel.

1 pont*

*****_Megjegyzés:_
Ha a versenyző feltételezi, hogy mindenki evett reggel legalább még egy pogácsát, és így arra a következtetésre jut, hogy még legalább $1 + 4 + 6 - 5 = 11 - 5 = 6$ *db pogácsát kell rendelniük, akkor is kapjon maximális pontszámot.*

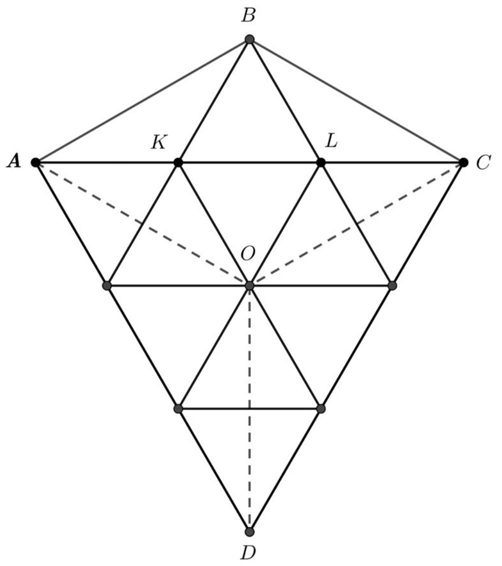
Összesen: 8 pont

3. feladat. Az ábrán egy olyan kör-rács részletét látjuk, amelyen minden kör 6 másik ugyanakkora kört érint. Mekkora a négyszög területe, ha a kis háromszög területe $1\ m^2$?
Az ábra nem tükrözi a valós méreteket.



(8 pont)

I. megoldás:



Kössük össze a körök középpontjait. (Elég, ha látszik a rajzon.)

1 pont

Az *ACD* háromszöget így felbontottuk 9 kis háromszögre.

1 pont

Tehát az *ACD* háromszög területe 9 m^2.

2 pont

A *KLB* háromszög is egy kis háromszög, így a területe 1 m^2.

1 pont

Az *AKB* és *CLB* háromszöget hosszabbik oldaluknál összeillesztve egy 2 kis háromszögből álló négyszöget kapunk. (Mint pl. az *OLBK* négyszög.)

1 pont

Ez így még 2 m^2 terület.

1 pont

Az egész terület így összesen 12 m^2.

1 pont

Összesen: 8 pont

II. megoldás

Kössük össze a körök középpontjait. (Elég, ha látszik a rajzon.)

1 pont

Az *ACD* háromszöget így felbontottuk 9 kis háromszögre.

1 pont

Tehát az *ACD* háromszög területe 9 m^2.

2 pont

A csúcsokat az *O* ponttal összekötve az *ACD* háromszöget felbonthatjuk 3 egyforma háromszögre.

1 pont

Egy ilyen háromszög területe így 3 m^2.

1 pont

Az *ABC* háromszög ugyanolyan, mint az előbbi 3 háromszög, így ennek a területe is 3 m^2.

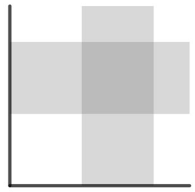
1 pont

Az egész terület így összesen 12 m^2.

1 pont

Összesen: 8 pont

4. feladat. Nagymama almás pitét süt az unokáinak, és a pite tetejére tésztacsíkokból rácsot készít. A tésztacsíkok 2 cm szélesek, és a tepsi négyzet alakú. A rácsban a tésztacsíkok ugyanolyan távol vannak egymástól és a tepsi szélétől, mint a csík szélessége. Hány cm a tepsi oldala, ha a rácsban az átfedett részek területe összesen 144 cm^2 ?



A képen a tepsi bal alsó sarka látható.

(10 pont)

Megoldás:
Az átfedett részek a tésztacsíkok találkozásánál alakulnak ki, így egy átfedett rész területe $2 \cdot 2 = 4$ cm^2 területű.

2 pont

Az átfedett részek összterülete 144 cm^2, ezért összesen $\frac{144}{4} = 36$ átfedő rész van.

1 pont

Mivel a tepsi négyzet alakú ezért az átfedő részek is egy négyzet alakban fognak elhelyezkedni,

1 pont

mégpedig egy 6×6-os négyzetben.

1 pont

A tepsi egyik oldala mentén felváltva helyezkednek el az átfedő és a nem átfedő részek, összesen 6 átfedő és 7 nem átfedő rész (5 az átfedők között és 2 a szélén).

3 pont

Minden tésztacsík és a köztük, mellettük levő részek is 2-2 cm szélesek, így a tepsi oldala $(6 + 7) \cdot 2 = 26$ cm hosszú.

2 pont

Összesen: 10 pont

5. feladat.
Mikulásfalván 2024 gyerek él. Mikulás napján mindegyikük kap egy csomagot. A könnyebb kiosztás érdekében Krampuszínó 1-től 2024-ig megszámozza a csomagokat. Krampuszínó kedvenc számjegye a 3. Hány 3-as számjegyet ír le, amíg megszámozza a csomagokat?

(14 pont)

I. megoldás:
Számoljuk meg, hogy melyik helyiértéken hányszor szerepel a 3-as számjegy.

2 pont

Számoljuk meg 1-2024-ig azokat a számokat, amelyekben az egyesek helyiértékén 3-as számjegy áll.
Ha százasok és tízesek helyiértékére is 0-tól 9-ig beírunk egy számjegyet, az ezresek helyére pedig a 0 vagy 1 számjegyek valamelyikét, akkor biztosan egy 2024-nél kisebb számot kapunk. (Ha a szám első néhány számjegye 0, akkor azokat úgy tekintjük, mintha nem lennének ott, tehát a 0043 pl. a 43 kétjegyű számnak felel meg.)
Ez így összesen $2 \cdot 10 \cdot 10 = 200$ db számot ad meg.

3 pont

Ezen kívül 2000 felett még a 2003, 2013 és a 2023 is olyan szám, ahol az egyesek helyén 3-as áll, ez 3 db szám.

2 pont

Tehát összesen 203 db szám van 1-től 2024-ig, melyben az egyesek helyén 3-as áll, így ez 203 db 3-as számjegy leírását jelenti.

1 pont

Hasonlóan elmondható, hogy ha azokat a számokat számoljuk, ahol a tízesek helyiértékén álló számjegy a 3-as, abból is 200 db van, mert az ezresek helyére írhatjuk a 0 vagy az 1 számjegyet, a százasok és egyesek helyére pedig 0-tól 9-ig bármilyen számjegyet.

2 pont

Továbbá a százasok helyiértékén 3-ast tartalmazó számokból is 200 db van, mert az ezresek helyére írhatunk 0 vagy 1 számjegyeket, a tízes és egyes helyiértéken szereplő számjegy pedig 0-tól 9-ig bármi lehet.

2 pont

Tehát összesen $203 + 200 + 200 = 603$ db 3-as számjegyet írt le Krampuszínó.

2 pont

Összesen: 14 pont

II. megoldás:

Az egyjegyű számok leírásakor összesen csak 1 db 3-as számjegyet írunk le, a 3-as szám leírásakor.

1 pont

Kétjegyű számok esetében a 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93 számok leírása összesen 10 db 3-as számjegy leírásával jár, a 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39 számokban további 9 db 3-as számjegy található, így összesen a kétjegyű számok leírása 19 db 3-as számjegy leírásához vezet.

3 pont

Vizsgáljuk most a háromjegyű számokat. A százasok helyiértékén álló számjegy 1-től 9-ig bármi lehet. Ha nem 3-as, akkor ezekben a számokban ugyanannyi db 3-as számjegy lesz, mint az egyjegyű és kétjegyű számokban összesen, vagyis minden esetben 20 db.
Ez összesen $8 \cdot 20 = 160$ számjegy.

2 pont

300-tól 399-ig 100 db szám van, ezeknek az első számjegye 3-as, ez 100 db, és még annyi 3-as számjegy van bennük összesen, ahány a legfeljebb kétjegyű számokban, tehát 20 db.
Így 300-399-ig leírva a számokat összesen 120 db 3-as számjegyet ír le Krampuszínó.

2 pont

Tehát a háromjegyű számokban összesen $160 + 120 = 280$ db 3-as számjegy van.

2 pont

A négyjegyű számokban, ha 1-es áll az ezresek helyiértékén, akkor ugyanannyi 3-as számjegy van, mint az egyjegyűekben, a kétjegyűekben, és a háromjegyűekben összesen.
Ez $1 + 19 + 280 = 300$ db.

2 pont

2000-től 2024-ig még 3 db olyan szám van, mely 2-essel kezdődik, és van benne 3-as számjegy: a 2003, 2013, 2023, mindegyikben egy db van, így ez még 3 db 3-as számjegy leírásával jár.

1 pont

Így összesen $1 + 19 + 280 + 300 + 3 = 603$ db 3-as számjegyet kell leírnia Krampuszínónak.

1 pont

Összesen: 14 pont

III. megoldás:

Ha az egyjegyű és kétjegyű számok elé kettő vagy egy db 0-t írunk, akkor 0-tól 999-ig minden számnak megfelel egy háromjegyű szám, melynek esetleg az első néhány jegye 0.

2 pont

Három helyiértékre 10 féle számjegyből 10^3 féle háromjegyű szám képezhető, ez $3 \cdot 10^3 = 3000$ db számjegy leírásával jár.

4 pont

Minden számjegyet ugyanannyiszor használunk fel, tehát $3000 : 10 = 300$ db 3-as számjegyet írunk így le. (A hozzáírt 0-ás számjegyek nem befolyásolják a 3-as számjegyek számát.)

4 pont

Mivel 1000-től 1999-ig a számok megkaphatók úgy, hogy az előbb vizsgált háromjegyű számok elé írunk egy 1-est, ezért ezek leírásakor is pont ugyanannyi, azaz 300 db 3-as számjegyet kell leírni.

2 pont

2000-től 2024-ig még 3 db olyan szám van, mely 2-essel kezdődik, és van benne 3-as számjegy: a 2003, 2013, 2023, mindegyikben egy db van, így ez még 3 db 3-as számjegy leírásával jár.

1 pont

Így összesen $300 + 300 + 3 = 603$ db 3-as számjegyet kell leírnia Krampuszínónak.

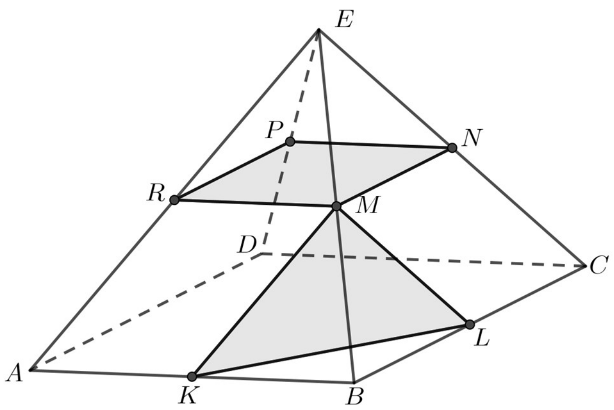
1 pont

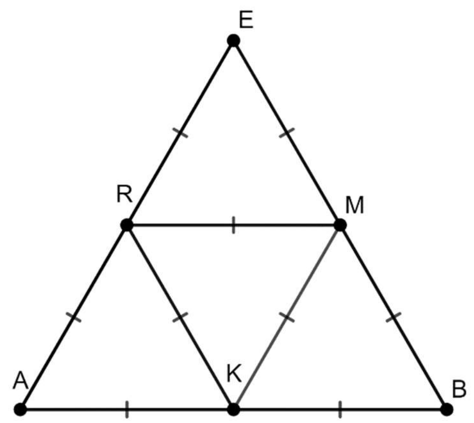
6. feladat. Készítettünk fából egy piramis alakú testet, majd a lapjait befestettük pirosra. A test alaplapja négyzet, oldallapjai szabályos (egyenlő oldalú) háromszögek. A piramis minden csúcsát levágjuk egy olyan vágással, amelyik az oldalélek felezőpontján megy át.

a) Milyen alakzatok a keletkezett festetlen lapok?
b) A régi, piramis alakú test egyes lapjainak hányad része marad meg az új, levágások után keletkezett testen?

(14 pont)

Megoldás:





a)

Rajz, amiről látszik, hogy a versenyző megértette, mely részeket kell levágni.

3 pont

Az *E* csúcsot levágva egy négyzetet kapunk.

1 pont

Az alaplap csúcsait (pl. *B* csúcs) levágva egyenlő szárú háromszöget kapunk.

1 pont

KM = *KB* és *LM* = *LB*, így a *KML* és *KBL* háromszögek egyformák (egybevágók).

1 pont

Tehát az alaplap csúcsainak helyén egyenlő szárú derékszögű háromszögek keletkeznek.

1 pont

b)

A szabályos háromszög oldalfelező pontjait összekötve 4 egyforma háromszögre osztjuk az eredetit.

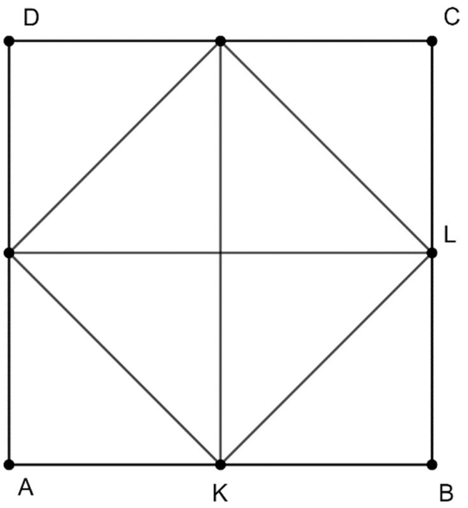
2 pont

Így a háromszögek területének negyed része marad meg az új testen.

1 pont

Ha a négyzet szemközti oldalának felezőpontjait összekötjük, akkor 4 egyforma kisebb négyzetet kapunk.

2 pont



Ha a szomszédos felezőpontokat összekötjük, akkor mindegyik kis négyzet területét megfelezzük.

1 pont

Így a négyzet területének a fele marad meg az új testen.

1 pont

Összesen: 14 pont

Maximális pontszám: 60 pont