Megoldások

1. Legyen P az ABC szabályos háromszög belső pontja. P merőleges vetülete a BC, CA és AB oldalakra rendre A_1, B_1 és C_1. Tudjuk, hogy $AC_1 = 4$, $C_1B = 8$ és $BA_1 = 5$. Mennyi $CB_1 \cdot B_1A$?

Eredmény: 27.

I. megoldás
Mivel ABC szabályos, $BC = CA = AB = 12$. Azt is tudjuk, hogy $AC_1 + BA_1 + CB_1 = 18 = \frac{3 \cdot 12}{2}$: Ez igaz akkor, ha pl. $P = O$, a háromszög középpontja, és ha P más pont, akkor az összeg $\overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{AB}^0 + \overrightarrow{BC}^0 + \overrightarrow{CA}^0) = \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{0} = 0$-val változik, ahol $\overrightarrow{v}^0 = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$. Tehát $CB_1 = 9$ és $B_1A = 3$, melyek szorzata 27.

II. megoldás
Húzzunk az ABC háromszög oldalaival párhuzamosokat P-n át. Így P és az ABC háromszög oldalai között szabályos háromszögeket kapunk, P-től az A, B, C csúcsok felé pedig paralelogrammák jönnek létre. Jelölje e kis szabályos háromszögek oldalának hosszát rendre α, β és γ, tehát

$$AC_1 = \beta + \frac{1}{2}\gamma, \qquad C_1B = \alpha + \frac{1}{2}\gamma, \qquad BA_1 = \gamma + \frac{1}{2}\alpha.$$

Ezekből meghatározható α, β és γ értéke és adódnak $CB_1 = \alpha + \frac{1}{2}\beta$, $B_1A = \gamma + \frac{1}{2}\beta$ értékei.

2. Hány olyan 8-jegyű szám van, ami a 9-edére csökken, ha az első számjegyét töröljük?

Eredmény: 7.

Megoldás
Legyen a az első jegy, b pedig a további 7 jegy összeolvasásával létrejött szám. $1 \le a \le 9$, $0 \le b < 10^7$. Ekkor annak kell teljesülnie, hogy:

$$9b = 10^7 a + b$$
$$b = \frac{10^7}{8} a$$

Ez $1 \le a \le 7$-re egy-egy jó megoldást ad.

3.
A kirabolt Mézga család Párizsban próbál pénzt szerezni. Aladár elmegy a Magyar Nagykövetségre kölcsönért. Mások is vannak ott, vele együtt 21-en állnak sorban. Mind különböző magasságúak, Aladár a harmadik legalacsonyabb. A sorban legelöl állótól kezdve felsoroljuk, hogy az egyes emberek előtt hány náluk magasabb ember áll a sorban:

$$0, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 3, \quad 3, \quad \ldots \quad 9, \quad 9, \quad 10.$$

Aladár mögött hány nála magasabb ember áll a sorban?

Eredmény: 16

Megoldás
A legmagasabb ember 0-t mondott és ő az, aki ezt a számot a sorban leghátrébb mondhatta, tehát a második helyen áll.

A második legmagasabb ember 0-t mondott, ha előbb állt a sorban, mint a legmagasabb és 1-et, ha mögötte és ő az, aki az így nyilatkozó emberek közül a sorban leghátrébb állhatott, tehát a negyedik helyen áll.

Általában az i-edik legmagasabb ember 0-t, 1-et, ... vagy $(i-1)$-et mondhatott attól függően, hogy a nála magasabbakhoz képest hol állt és az ennek megfelelően nyilatkozó emberek közül ő a leghátsó. Ennek alapján világos, hogy az első, második, harmadik, ... tizedik legmagasabb ember rendre a 2., 4., 6., ..., 20-adik helyen állt.

Hasonlóan érvelve adódik, hogy a 11., 12., 13., ..., 19., 20. és 21. legmagasabb emberek rendre a 21., 19., 17., ..., 5., 3., 1. helyeken álltak.

A 3. legalacsonyabb ember a 19. legmagasabb, ő tehát az 5. helyen állt, mögötte pedig csak magasabbak voltak, összesen 16-an.

4. Az ABC háromszögben A_1 és B_1 a BC illetve AC oldalak belső pontjai. AA_1 és BB_1 metszéspontja M. Az AMB_1, AMB és BMA_1 háromszögek területe rendre 3, 7 és 7 egység. Mennyi a CB_1MA_1 négyszög területe?

Eredmény: 18.

I. megoldás

Jelölje a CB_1M, CMA_1 háromszögek területét x illetve y.

A CB_1M, B_1AM háromszögek M-hez tartozó magassága azonos, csakúgy, mint a CB_1B, B_1AB háromszögek B-hez tartozó magassága. Így a két háromszög területének aránya mindkét esetben a CB_1, B_1A oldalak arányával egyezik meg, tehát egymással is egyenlő:

$$\frac{x}{3} = \frac{x+y+7}{10}. \tag{1}$$

Ehhez hasonlóan írható vizsgálható a CA_1M, A_1BM illetve a CA_1A, A_1AB háromszögek területének aránya:

$$\frac{y}{7} = \frac{x+y+3}{14}. \tag{2}$$

Az (1)-(2) egyenletrendszerből $x = 7,5$, $y = 10,5$ tehát a kérdezett terület: $x + y = 18$.

II. megoldás

Fejezzük ki $M(a, b, c)$ baricentrikus koordinátáit! $\frac{B_1M}{B_1B} = \frac{3}{3+7}$, tehát $b = \frac{3}{10}$, és $\frac{A_1M}{A_1A} = \frac{7}{7+7}$, ezért $a = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$. Tehát M koordinátái $(1/2, 3/10, 1/5)$, vagyis $\frac{ABM}{ABC} = \frac{1}{5}$. Tehát ABC területe $5 \cdot 7 = 35$, amiből a négyszög területe $35 - (3 + 7 + 7) = 18$.

III. megoldás A BM alaphoz tartozó BMA, BMA_1 háromszögek egyenlő területűek, így a BM_1 alaphoz tartozó B_1MA, B_MA_1 háromszögek területe is egyenlő, mindkettőé 3. Jelölje még T a A_1B_1C háromszög területét!

Mivel

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{T_{A_1B_1C}}{T_{A_1B_1A}} = \frac{T_{BB_1C}}{T_{BB_1A}},$$

így $\frac{T}{6} = \frac{T+10}{10}$, amiből $T = 15$ és a kérdezett érték 18.

5.

$$\prod_{k=2}^{100} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{p}{q}$$

Adjuk meg $p + q$ értékét, ha p és q relatív prím pozítív egészek.

Eredmény: 8417.

Megoldás

Ismeretes, hogy

$$k^3 + 1 = (k+1)(k^2 - k + 1), \qquad k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1)$$

és

$$k^2 - k + 1 = (k-1)^2 + (k-1) + 1,$$

tehát

$$\prod_{k=2}^{100} k^3 + 1 = \left(\prod_{k=3}^{101} k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{99} k^2 + k + 1\right)$$

és

$$\prod_{k=2}^{100} k^3 - 1 = \left(\prod_{k=1}^{99} k\right) \cdot \left(\prod_{k=2}^{100} k^2 + k + 1\right),$$

így a kérdezett hányados

$$\prod_{k=2}^{100} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{100 \cdot 101}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1^2 + 1 + 1}{100^2 + 100 + 1} = \frac{5050}{3367}$$

Ez nem egyszerűsödik tovább, mivel $GCD(5050, 3367)|GCD(10100, 10101) = 1$. Tehát a válasz $5050 + 3367 = 8417$.

6. Az $A_1A_2A_3A_4$ egységnégyzet oldalain felvesszük a B_1, B_2, B_3 és B_4 pontokat úgy, hogy B_i az A_iA_{i+1} szakaszon legyen (ahol természetesen $A_5 = A_1$) és $A_iB_i = \frac{1}{n}$ teljesüljön. Mi az a legkisebb n egész, amire az A_1B_2, A_2B_3, A_3B_4 és A_4B_1 egyenesesek által meghatározott négyzet területe legalább 0.9?

Eredmény: 20.

Megoldás
Feltesszük, hogy $n \geq 2$; $n = 1$-re a négy egyenes egy ponton megy át (a terület 0).
Legyen az A_iB_{i+1} és az $A_{i+1}B_{i+2}$ metszéspontja C_{i+1} (ciklikus számozás). Ekkor az ábrán rengeteg hasonló derékszögű háromszög lesz, pl. $A_2B_2A_1 \sim C_2A_2A_1 \sim C_1B_1A_1$. Ezeket felhasználva:

$$\frac{A_1C_2}{A_1A_2} = \frac{A_1A_2}{A_1B_2}$$

$$A_1C_2 = \frac{A_1A_2^2}{A_1B_2} = \frac{1^2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{A_1A_2}{A_1B_2}$$

$$A_1C_1 = \frac{A_1B_1 \cdot A_1A_2}{A_1B_2} = \frac{\frac{1}{n} \cdot 1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Ebből a négyzet oldalhossza:

$$C_1C_2 = A_1C_2 - A_1C_1 = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$$

A négyzet területe:

$$A(C_1C_2C_3C_4) = C_1C_2^2 = \frac{(n-1)^2}{n^2+1} = 1 - \frac{2n}{n^2+1}$$

Azt az n-et keressük, amire:

$$\frac{2n}{n^2+1} \leq \frac{1}{10}$$

$$n^2 - 20n + 1 \geq 0$$

$$n \geq 10 + \sqrt{10^2 - 1} = 19,9\ldots$$

Tehát a legkisebb megfelelő n érték 20.

7. Legfeljebb hány eleme lehet egy egész számokból álló M halmaznak, ha M egyik eleme sem osztható 7-tel, de bármely 4 eleme közt van néhány, melyeknek összege osztható 7-tel?

Eredmény: 8.

Megoldás
Kézzel ellenőrizhető, hogy ha az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ redukált maradékrendszerben két ellentett elemet, mondjuk az 1-et és a 6-ot megduplázzuk: $\{1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6\}$, akkor jó 8 elemű listát kapunk. (Itt és a továbbiakban „jó” azt jelenti, hogy bármely négy elem között vannak olyanok, amelyek összege osztható 7-tel.)

Tegyük fel ezek után, hogy létezik **nem nulla** maradékoknak egy 9 elemű jó listája. Ebben minden maradék legfeljebb 3-szor fordul elő. ($ix \equiv 0 \ (mod\ 7)$ és $i \leq 4 \to x \equiv 0 \ (mod\ 7)$.)

Ha van olyan x maradék, amelyik pontosan háromszor fordul elő, akkor a lista minden további y maradékára az $x+y, 2x+y, 3x+y$ összegek között van 7-tel osztható. A lista további maradékai (hat darab) tehát legfeljebb háromfélék lehetnek. Az x-en kívül tehát legalább két további maradék fordul elő egynél többször.

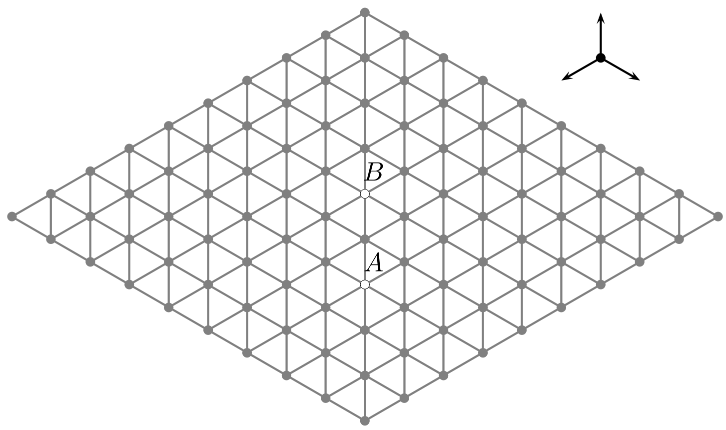
Lényegében ugyanez a helyzet, ha egyetlen maradék sem fordul elő kettőnél többször: ekkor is van három olyan maradék, x, y és z, amelyek legalább kétszer fordulnak elő a listában. Eddig volt a tilitoli, jön a végjáték: ehhez kell a lista $\{x, x, y, y, z, z\}$ része.

Nézzünk két párt: $\{x, x, y, y\}$. Ebben a négyesben három összegnek van esélye, hogy osztható legyen 7-tel: $x + y, 2x + y$ és $x + 2y$. Ezek **szorzata**[1] tehát osztható 7-tel! A misztikus szorzat pedig:

$$(x + y)(2x + y)(x + 2y) = 2(x^3 + y^3) + (1 + 2 + 4)(x^2y + xy^2).$$

Ebben az $\{x, x, y, y\}$ négyesben tehát $7 \mid x^3 + y^3$. A másik kettőben ugyanígy $7 \mid y^3 + z^3$ és $7 \mid z^3 + x^3$, vagyis mindhárom maradék 0. Hát ez ellentmondás.

8. A szabályos *végtelen* háromszögrácsban rácspontról szomszédos rácspontra léphetünk, de csak a három megadott irányban. Hányféleképpen juthatunk el az A pontból a B pontba, ha 13-nál nem léphetünk többet? (Azokat az utakat is vegyük számításba, amelyek menet közben előbb is átmennek B-n, majd visszatérnek oda.)



Eredmény: 9681

Megoldás

$$\frac{2!}{2! \cdot 0! \cdot 0!} + \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} + \frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} + \frac{11!}{5! \cdot 3! \cdot 3!} = 9681.$$

9. Adjuk meg $\lfloor 100xy \rfloor$ értékét, ha x és y olyan racionális számok, amelyekre

$$\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}.$$

Eredmény: 75.
Megoldás
Négyzetreemelés és rendezés után

$$(x + y - 2)\sqrt{3} = 2\sqrt{3xy} - 3 \tag{3}$$

majd újra négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$3(x + y - 2)^2 = 9 + 12xy - 12\sqrt{3xy}. \tag{4}$$

Ebből az összefüggésből világos, hogy $\sqrt{3xy}$ racionális, így (3)-ben az $\sqrt{3}$ irracionalitása miatt

$$(x + y - 2) = 0 \qquad \text{és} \qquad 2\sqrt{3xy} - 3 = 0.$$

A második egyenletből azonnal adódik, hogy $xy = \frac{3}{4}$, tehát a kérdezett érték 75.

Amúgy a kiindulási egyenlet bal oldala pozitív, így a jobb oldala is az, tehát $x > y$. Ezért a fenti szimmetrikus egyenletrendszerből csak az $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ a jó megoldás és ez az is, hiszen $x > y$ esetén az eredeti egyenlet mindkét oldala pozitív, tehát a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

[1] Végre szimmetrikus lett a dolog!

10. *Kömal, P.94., 1971/10 old 219, Vesztergombi Katalin javaslata*
Az 1, 2, ..., 16 számoknak, hány olyan $i_1, i_2, \ldots, i_k$ permutációja van, amelyben minden $1 \le k \le 16$ mellett teljesül az $|i_k - k| \le 1$ feltétel?

Eredmény: 1597.

Megoldás
Ha a kérdezett permutációk száma az 1-től 16 terjedő számok helyett az 1-től n-ig terjedő számokra p_n, akkor $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ és $p_{n+2} = p_{n+1} + p_n$, így $p_{16} = 1597$.

11. Hány részre vágják a szabályos tetraédert azok a síkok, amelyek tartalmazzák a tetraéder egy-egy élét és átmennek a szemköztes él felezőpontján?

Eredmény: 24.

Megoldás
Ezek a síkok mind átmennek a tetraéder súlypontján. Így a létrejövő tartományok olyan kúpszerű (végtelen gúlaszerű) térrészek lesznek, amelyek csúcsa a súlypont. A tetraéder egy lapját ezek a síkok a súlyvonalakkal osztják el, így minden lapon 6 rész keletkezik, összesen $6 \cdot 4 = 24$ térrész jön létre.

Megjegyzés
A tetraéder helyett bármilyen konvex (vagy csillagszerű) test felszínét használhatjuk, amiben benne van a középpont. Egy alternatív lehetőség a bennfoglaló parallelepipedon (kocka) felszínén nézni a tartományokat; a kocka minden lapját 4 háromszögre osztják a síkok.

12. Egy téglatest minden éle és testátlója egész hosszúságú méterben mérve. Tudjuk, hogy a téglatestnek pontosan annyi m^2 a felszíne, mint ahány m^3 a térfogata. Határozzuk meg a testátló lehetséges legnagyobb hosszát.

Eredmény: 21.

Megoldás: A $2(xy + yz + zx) = xyz$ egyenlet

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

alakba írható át.
Feltehető, hogy $x \le y \le z$, ebből $3 \le x \le 6$. Innen könnyű összeírni az eseteket. Amúgy rögzített x-re egy $ayz = b(y+z)$, avagy $(ay - b)(az - b) = b^2$ alakú diofantikus egyenletet kapunk, ami b^2 faktorizálásával is megoldható.
A véges sok megoldás: $(6,6,6)$, $(5,5,10)$, $(4,8,8)$, $(4,6,12)$, $(4,5,20)$, $(3,12,12)$, $(3,10,15)$, $(3,9,18)$, $(3,8,24)$, $(3,7,42)$.
Csak a három $x = 4$ esetben négyzetszám a négyzetösszeg, az utolsónál maximális.

13. Legyen $a = 1 + \sqrt{5}$. Mennyi

$$S = (4 - a) \cdot \sqrt{2 + a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{3a + 4}$$

Eredmény: 4.

Megoldás: Az a minimálpolinomja $a^2 - 2a - 4$, ahonnan az a hatványai: $a^2 = 2a + 4$, $a^3 = 8a + 8$, $a^4 = 8(3a + 4)$.

Innen
$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{3a+4} = \sqrt[6]{a^6/8} = \sqrt{a^2/2} = \sqrt{a+2}.$$
Így $S = (4 - a)(\sqrt{a+2})^2 = (4 - a)(a + 2) = 4$.

I. Megjegyzés
Ez azért csak utólag ilyen egyszerű, jól el is lehet bonyolítani. Hatodik hatványra emelni például csak elvileg egyszerű, a kapott 12-edfokú polinomot még ki kell értékelni az a helyen.

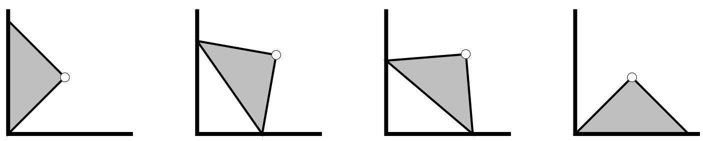
II. Megjegyzés
Gyorsabb a számolás ha $t = a/2$-vel dolgozunk. Ekkor ugyanis $t^2 = t + 1$.

III. Megjegyzés
Haladó algebra nélkül is sejthető, hogy ha az eredmény szép lesz, akkor a köbgyököt tartalmazó tagok együtt ki kell ejtsék a köbgyököt. Tehát szeretnénk, ha $a^2(3a+4)$ teljes köb lenne.

A $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$ számtestben adott egy (multiplikatív) norma: $||a+b\sqrt{5}|| = a^2-5b^2$. Ezt kiszámolva $||a^2(3a+4)|| = 64$, tehát ha ez teljes köb ebben a testben, akkor a köbgyök normája biztosan 4. Ráadásul algebrai egész köbgyöke algebrai egész, tehát ha a számtestben van, akkor $a + b \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ alakú, ahol a és b egész. Így már nem lehetetlen megtalálni a köbgyököt.

IV. Megjegyzés
Egy másik lehetőség abból kiindulni, hogy a feladat helyes (vagyis az eredmény egész szám), és ügyes becslésekkel belátni, hogy 3 és 5 közé esik. Még ravaszabb elképzelés az, hogy $(4-a)\cdot x$ egész szám, ami akkor lehet, ha $x = \frac{k}{4}\cdot(2+a)$, ahol k egész. Tehát eleve tudjuk, hogy a két utolsó tényezőből $\sqrt{2+a}$ racionálisszorosát akarjuk végül kapni, ami megkönnyíti a számolást.

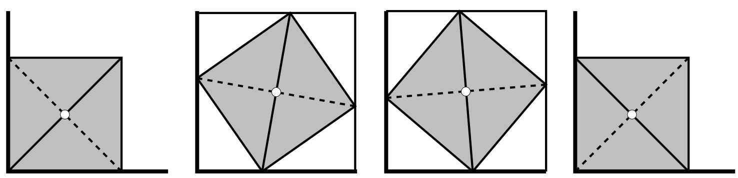
14. Mézga Aladár egyik űrutazásán laposföldjén járt. Itt látta, ahogy egy honpolgár egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú bútort tolt át egy derékszögű sarkon az alábbi ábra szerint. Mekkora utat járt be eközben a derékszögű csúcs, ha az átfogó hossza 2 méter? Adjuk meg a megtett utat (tehát nem az elmozdulást és nem is a pályagörbe hosszát) centiméterben!



Eredmény: 117

Megoldás
Forgassunk egy egész négyzetet át a sarkon az ábra szerint. Ha az eredeti egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogón levő csúcsai $(0,a)$ és $(b,0)$, akkor a négyzet további csúcsai $(a+b,b)$ és $(a,a+b)$, így a négyzet középpontja $\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2}\right)$.

A négyzet oldala, azaz a $\sqrt{a^2+b^2} = c$ mennyiség rögzített, értéke most 2 m, míg b értéke befutja a $[0;2]$ intervallumot. Miközben b értéke 0-tól 1-ig nő, a négyzet középpontja a $P_0(1;1)$ ponttól a $P_1(\sqrt{2};\sqrt{2})$ pontig mozog P_0-tól mindig P_1 felé a P_0P_1 szakaszon, tehát megtett útja méterben $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$. Amikor b értéke 1 és 2 között változik, a négyzet középpontja visszamegy a P_1P_0 szakaszon P_1-től P_0-ba. A teljes megtett út méterben $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 4-2\sqrt{2}$, ami centiméterben kb. 117.



15. Egy konvex 24-szög csúcsai közül hányféleképpen lehet kiválasztani négyet úgy, hogy az általuk meghatározott konvex négyszög oldalai a 24-szög *átlói* legyenek?

Eredmény: 5814.

I. Megoldás
Az 1, 2, ..., 24 számok olyan négyelemű részhalmazait kell kiszámolni, amelyekben
A) nincsenek szomszédos számok;
B) Nincs egyszerre benne az 1 és a 24.

Az A)-nak megfelelő sorozatokból $\binom{21}{4}$ van. Ezek között a B)-t nem teljesítő sorozatok középső három eleme a 3, 4, ..., 22 halmaz olyan két elemből álló részhalmazát adja, amelyben nincsenek szomszédos elemek. Ezek száma $\binom{19}{2}$. Az eredmény: $\binom{21}{4} - \binom{19}{2} = 5814$.

II. Megoldás
Válasszunk ki a négy csúcs közül egyet tetszőlegesen. A maradék 3 csúcs 21 helyen lehet, de nem lehet két ciklikusan szomszédos, tehát $\binom{21-3+1}{3}$-féleképp tehetők le. De így mindent 4-szer számolunk, tehát az eredmény $\frac{1}{4}\cdot 24\cdot\binom{19}{3}=5814$.

16. Adott n lefordított pohár sorban az asztalon, ezek alatt golyók lehetnek. Meg akarjuk állapítani, hogy van-e két szomszédos pohár alatt golyó. Ehhez egyesével fordíthatunk fel poharakat. Ezt a feladatot nehéznek nevezzük, ha bármilyen jó stratégiát is választunk, lehetséges, hogy minden poharat fel kell fordítanunk, hogy megtudjuk a választ. Az $n=1,2,\dots 2013$ értékek közül hánynál nehéz a feladat?

Eredmény: 1342.

I. Megoldás
Az $n\equiv 1 \pmod 3$ számokra nem nehéz a feladat. Valóban, $n=1$-re nem nehéz, nem is kell kérdeznünk, és innen teljes indukcióval megyünk. Ha $n=3k+1$ $(k>0)$, akkor fordítsuk fel a balról harmadik poharat. Ha nincs alatta golyó, akkor tőle jobbra $(3(k-1)+1$ pohár maradt, amely nem nehéz feladat, így az egész sem az. Ha van alatta golyó, akkor a bal oldali szomszédját nézzük és ha ott van golyó, akkor máris találtunk kettőt, ha nincs, akkor a bal szélső poharat már nem is kell néznünk, nem nehéz a feladat.

Igazoljuk, hogy $n\not\equiv 1 \pmod 3$ esetén nehéz a feladat. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. $n=2$-re és $n=3$-ra tényleg nehéz a feladat. Általában, ha először olyan poharat nézünk meg, amelytől balra és jobbra is külön-külön önmagában nehéz a feladat, akkor ha az először megnézett pohár alatt nincs golyó, akkor nem tudunk ügyesek lenni, mindent meg kell nézni. Két eset marad (1 jelöli az első körben megnézett poharat:
a) $3a, 1, 3b+1$; **b)** $3c+1, 1, 3d+1$.
Ha most az elsőre megnézett pohár alatt van golyó és a mellette levőkön (amelyeket valamikor úgyis meg kell nézni) nincs, akkor nehéz csupa nehéz feladathoz jutunk, tehát az eredeti is nehéz.

II. Megoldás
Legyen először $n\equiv 1 \pmod 3$. Fedjük fel minden i-adik poharat, ahol $i\not\equiv 1 \pmod 3$. Ha két szomszédos felfedett pohár alatt volt golyó, akkor nyertünk. Ha nem, akkor rajzoljuk föléjük legfeljebb egy nyilat: az üres pohár felől a golyó felé, ha van golyó, ill. semmit nem rajzolunk, ha nincs. Pl. ha a golyók száma a poharak alatt $*\ 0\ 1\ *\ 0\ 0\ *\ 1\ 0\ *$ (ahol $*$ a felfedetlen poharakat jelöli), akkor az ábra $* \to * \quad * \leftarrow *$. Csak azokat a poharakat kell felfordítanunk, amikre nyíl mutat; mivel $i+1$ db. $*$ van és legfeljebb i nyíl, nem kell mindet felfordítani.

$n\not\equiv 1 \pmod 3$ esetén viszont nehéz a feladat. A „gonosz manó" nyerő stratégiáját írjuk le. Az egyszerűség kedvéért gondoljunk a sor két szélére 1-1 már felfordított poharat, amik alatt nem volt golyó.

Akármelyik poharat fordítjuk fel, a gonosz manó a következő módon dönti el, hogy legyen-e alatta golyó. Azt az állapotot akarja fenntartani, hogy minden két felfedett pohár közötti egybefüggő felfedetlen (j hosszú) sorozatra (ahol j lehet 0 is):

1. Ha mindkét szélén üres felfedett pohár van $(0**\cdots*0)$: $j\not\equiv 1 \pmod 3$,
2. Ha az egyik vége üres, a másik vége teli $(1**\cdots*0)$: $j\not\equiv 2 \pmod 3$,
3. Ha a sor mindkét végén van golyó $(1**\cdots*1)$: $j\not\equiv 0 \pmod 3$.

Indukcióval és könnyű esetszétválasztással látható, hogy akármelyik poharat fordítja is fel a játékos, a gonosz manó elérheti, hogy ez az állapot fennmaradjon. Márpedig amíg az állapot fennáll, és van felfordítatlan pohár, addig nem lehet biztosra megmondani a választ, tehát a feladat nehéz.

(Természetesen ha a manó játék közben nem tudja megváltoztatni a golyókat, akkor kidolgozható olyan véletlen stratégia, hogy nagyon nagy valószínűséggel ne kelljen mindent felfordítani – de ez a valószínűség nem lehet 1.)

17. Melyik $n<10000$-re van a legtöbb olyan k pozitív egész, hogy n-et $2k+1$-gyel osztva k lesz a maradék? Adjuk meg n értékét!

Eredmény: 8662.
Megoldás
$n\equiv k \pmod{2k+1}$ akkor és csak akkor, ha $2k+1|2n+1$, tehát elég megmondani, hogy 20000-ig melyik $m=2n+1$ páratlan számnak van a legtöbb osztója (a k-k száma ennél 1-gyel kevesebb, mert $2k+1\neq 1$.)

$$m = 3^{l_1} \cdot 5^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{l_s}.$$

Tegyük fel, hogy $d(m) = (l_1+1) \cdot (l_2+1) \cdot \ldots$ maximális, az ilyen $m < 20000$ számok között pedig m minimális. Ekkor $l_1 \geq l_2 \geq \ldots l_s$.

Ha a 13 exponense, $l_5 \geq 1$, akkor $2n+1 \geq 3 \cdot 5 \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13) = 15 \cdot 1001 = 15015$, tehát $l_1 = \cdots = l_5 = 1$, $l_6 = 0$, vagyis $d(m) = 32$.

Tegyük fel, hogy $l_4 = 0$ (a 11 sem szerepel). Ekkor:

$l_2 = 0$ (nincs 5-ös) esetén 3-hatványt kapunk, ami triviális, hogy nem a legjobb.

$l_2 = 1$ esetén vagy $m = 3^{l_1} \cdot 5 \cdot 7$, amiből könnyen jön $l_1 \leq 7$, tehát $d(m) \leq 32$, vagy pedig $m = 3^{l_1} \cdot 5$, amiből bőven $d(m) < 10 \cdot 2$.

$l_2 \geq 2$ és $l_1 \geq 3$ esetén $\frac{11}{15}m$-nek legalább $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 1$-szer annyi osztója van és kisebb, ellentmondás.

$l_1 = l_2 = 2$ esetén $l_3 \geq 2$, ezért $\frac{11}{7}m$ jobb.

Tehát feltehető, hogy $l_4 = 1$, $l_5 = 0$. Vagyis $m = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot m' = 1155m'$, ahol m' prímtényezői a 3, 5, 7 közül kerülnek ki. $m_0 < 20$.

m_0 lehetséges értékei $1, 3, 5, 7, 9, 15$, amik közül könnyen látszik, hogy a 15 élesen a legjobb ($d(m) = 36$)), tehát $m = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$, amiből $n = \frac{m-1}{2} = 8662$. A lépéseket követve az is látható, hogy más $m' < 20000$-re $d(m') < d(m)$.

Megjegyzés

Ez a példa rokona a szokásos feladatoknak, hogy pl. „volt n süti, és akár $2, 3, 4, \ldots$ felé akarták osztani, mindig maradt 1 extra, mennyi n?". Kapcsolódó téma:

http://en.wikipedia.org/wiki/Highly_composite_number

18. Aladár egy 100 szakaszból álló töröttvonalon jut el az eredetileg tőle 900 m-re levő B ponthoz úgy, hogy minden pillanatban közelebb és közelebb kerül B-hez. Legfeljebb milyen hosszú lehet az útja (méterben)?

Eredmény: 9000.

Megoldás

Jelölje Aladár kiindulási pontját P_0, töröttvonalának további szögpontjait P_1, P_2, ..., P_{99} és $P_{100} = B$. Mivel Aladár végig közeledik B-hez, így a $P_iP_{i+1}B$ háromszögben nem lehet P_{i+1}-nél hegyesszög, azaz $P_iP_{i+1}^2 + P_{i+1}B^2 \leq P_iB^2$ és így a

$$\begin{array}{rcl} P_1B^2 & \leq & P_0B^2 - P_0P_1^2 \\ P_2B^2 & \leq & P_1B^2 - P_1P_2^2 \\ P_3B^2 & \leq & P_2B^2 - P_2P_3^2 \\ & \vdots & \\ P_{99}B^2 & \leq & P_{98}B^2 - P_{98}P_{99}^2 \end{array}$$

ahol $P_{99}B = P_{99}P_{100}$ az utolsó töröttvonal-darab hossznégyzete, míg $P_0B^2 = AB^2$ Aladár kiindulópontjának a céltól való távolságának négyzete. A fenti egyenletek összegéből:

$$P_0P_1^2 + P_1P_2^2 + \ldots + P_{98}P_{99}^2 + P_{99}P_{100}^2 \leq AB^2.$$

Érdemes felírnunk a számtani és a négyzetes közép közti összefüggést:

$$\frac{P_0P_1 + P_1P_2 + \ldots + P_{98}P_{99} + P_{99}P_{100}}{100} \leq \sqrt{\frac{P_0P_1^2 + P_1P_2^2 + \ldots + P_{98}P_{99}^2 + P_{99}P_{100}^2}{100}} \leq \frac{AB}{10}.$$

Innen

$$P_0P_1 + P_1P_2 + \ldots + P_{98}P_{99} + P_{99}P_{100} \leq 10AB.$$

Az egyenlőség el is érhető, ha a P_{99}, P_{98}, ..., P_0 pontokat úgy vesszük fel, hogy a $BP_{99}P_{98}$ háromszög egyenlő szárú és derékszögű legyen, majd a BP_{i+1} egyenesre P_{i+1}-ben mindig merőlegest állítunk és a megfelelő irányban felmérjük rá a $P_{i+1}P_i = BP_{99}$ szakaszt. Ha készen vagyunk P_0-lal is, akkor megfelelően forgatva nyújtjuk a töröttvonalat B körül, hogy P_0 Aladár előírt helyére kerüljön.

19. Az 1,2,3, ..., 8 számokat véletlenszerűen párokba rendeztük. A számegyenesen összekötjük a párok tagjait, így 4 szakaszt kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy ezek közt lesz olyan, ami az összes többit metszi? Adjuk meg a kapott valószínűség 2310-szeresének egész részét!

Eredmény: 1540

Megoldás
4, 6 és 8 szám esetén is $\frac{2}{3}$ jön ki a valószínűségre bogarászással. Ez az általános eredmény is, amit jóval nehezebb igazolni.

Részletesebben: Egy szakasz pontosan akkor találkozik mindegyik másikkal, ha mindegyik a kezdőpontja után végződik és a végpontja előtt kezdődik.

Tehát akkor „rossz” egy összekötés, ha az első végpont megelőzi az utolsó kezdőpontot, és nincs „híd”, ami mindkettőt lefedi. Könnyebb összeszámolni a „rossz” párosításokat. Összesen $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$ párosítás van. A következő táblázat mutatja, hogy adott utolsó kezdőpont (oszlopok) és első végpont (sorok) esetén hány rossz párosítás van; az összeg valóban 35, az összes lehetőség harmada.

	4	5	6	7
2		6	6	3
3			8	6
4				6
5				

20. Aladár, Béla és Cili játszanak. Aladárnak 15, Bélának 17, Cilinek 20 dollárja van. Egy menetben véletlenszerűen kiválasztanak két olyan játékost, akinek még van pénze és azok egymással játszanak. $50-50\%$, hogy egyikük illetve másikuk nyer. A vesztes 1 dollárt ad a győztesnek. Akinek elfogy a pénze, ez kiesik. Addig tart a játék, amíg egyikük elnyeri az összes pénzt.

Átlagosan hány menetből áll a játék?

Eredmény: 895.

Megoldás Két játékos esetén, kiknek kezdetben a illetve b dollárjuk van, a játék várható hossza ab, három esetén, ha a harmadiknak c dollárja van $ab+bc+ca$. Ezt könnyű igazolni a felírható egyenletrendszerrel.

I. Megjegyzés
Az előző megoldásban tényleg könnyű igazolni a Markov-láncnak megfelelő egyenleteket, bár a teljesen szigorú bizonyításhoz még kell egy kis munka: be kell látni, hogy minden várható érték véges (ez egyszerű), és hogy az egyenletrendszer megoldása egyértelmű (kis lineáris algebra). További kérdés, hogy hogyan fogjuk megsejteni az eredményt.

Ha ismerjük a választ 2 játékossal, akkor a következő gondolatmenet kiküszöböli a „vegyük észre, hogy”-ot. Nézzük a játékot Aladár szemszögéből. őt nem érdekli, hogy Béla és Cili közül kinek mennyi pénze van, csak az, hogy neki, ill. ellenfeleinek összesen mennyi van. Kezdetben a van neki és $b+c$ az ellenfeleinek. Mikor Béla és Cili játszik, Aladár kávészünetet tart; őt csak az érdekli, hogy neki hányat kell várhatóan játszania a játék végéig. Erre már tudjuk a választ: Aladár játékainak várható száma $EX_A = a(b+c)$. Hasonlóan $EX_B = b(a+c)$ és $EX_C = c(a+b)$.

Mivel minden játékban ketten játszanak, az összes játékok száma $X = \frac{X_A+X_B+X_C}{2}$, tehát várhatóan $EX = \frac{EX_A+EX_B+EX_C}{2} = ab+ac+bc$.

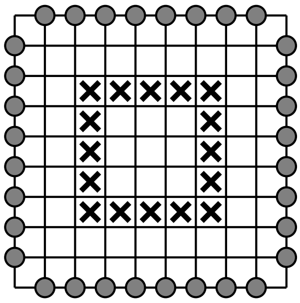
Hasonló képletet kapunk a játék átlagos hosszára n játékos esetén is.

II. Megjegyzés
Az $a+b+c=N$ síkon lényegében a diszkretizált hőegyenletet oldjuk meg; ha orthonormált koordinátákat veszünk fel ezen a síkon, akkor a $\sqrt{2}$ rácsállandójú háromszögrács pontjaira felírt „diszkrét Laplace-operátorral” $\Delta f = -\frac{1}{2}$ konstans. Ebből kitalálható, hogy a megoldást $f(\mathbf{x}) = K - \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2$ alakban kell keresni; $\mathbf{x}_0$ nyilván a középpont, K pedig annyi, hogy a háromszög sarkaiban pont 0 legyen a várható érték.

21. Aladár beírta az $1, 2, \ldots 81$ számokat egy 9×9-es táblázat mezőibe. Boldizsár ki szeretné találni, hogy melyik szám hol van. De csak úgy kérdezhet, hogy kijelöli a táblázat egy rácsvonalak határolta négyzet alakú részét. Válaszul Aladár felsorolja a kijelölt részben található számokat, a kedve szerinti sorrendben. Minimum hány kérdésre van szüksége Boldizsárnak ahhoz, hogy biztosan kitalálja melyik szám hol van?

Megoldás

Kérdezzük azt a 16 db 5×5-ös négyzetet, amelyek középpontjai az alábbi ábrán láthatók! Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely két mező a kijelölt 16 négyzetből különbözőekben van benne, így bármelyik számról kitalálható, hogy hol van. Másrészt a táblázat szélén 32 olyan pont van, amely két 1×1-es négyzet közös csúcsa. Bármely kérdésként kijelölt négyzetnek legfeljebb 2 csúcsa lehet ezek között a pontok között. A szélső mezők tartalmának megkülönböztetése érdekében mind a 32 pont elő kell forduljon csúcsként, így legalább $32/2 = 16$ kérdésre van szükség.



Megjegyzés

Egy másik lehetőség a konstrukcióra: kérdezzük azt a $4 \cdot 4$ négyzetet, melyeknek egyik sarka a nagy négyzet egy sarka, és élhossza $5 \leq a \leq 8$.