- Emlékeztetünk arra, hogy válaszként minden feladatra egy egész számot kell feltüntetni a válaszlapokon (0000-tól 9999-ig).
- Ha a ti válaszotok nem egész szám, akkor annak egész részét írjátok a válaszlapra.
- Ha az eredmény negatív szám, vagy a feladatnak nincs megoldása, akkor 0000-t írjatok.
- Ha az eredmény nagyobb 9999-nél, vagy nem egyértelmű, akkor 9999-t írjatok válaszul.
- A számolás során jól jöhetnek az alábbi közelítő értékek::

$\sqrt{2} = 1.4142$ $\sqrt{3} = 1.7321$ $\sqrt{7} = 2.6458$ $\pi = 3.1416$

Időhatárok

- **Az első 30 perc leteltével** már nem lehet a szöveggel kapcsolatos kérdéseket feltenni. A kérdéseket csak a **csapatkapitányok** tehetik fel a kérdések asztalánál.
- **90 perc elteltével: a versenynek vége.**

1.) *Mateklandi tombola* **15 pont**

Matekland városa minden évben tombolát szervez, hogy helyrebillentse zilált pénzügyeit. A nyertes sorsjegy száma az idén az a legnagyobb négyjegyû szám, amelynek jegyei összegét a negyedik hatványra emelve magát a számot kapjuk. Mi a nyerôszám?

2.) *Kockafej* **25 pont**

Új kisfiú érkezett a mateklandi óvodába. Míg a többi gyerek szépen oszt és bennfoglal, a megszeppent Fülöpkét játékkal gondolják jobb kedvre deríteni a szakkörvezetôk. Adnak neki 13 különbözô méretû, nyitott kocka alakú dobozt, ô elvesz egyet -- nem a legnagyobbat -- és beteszi egy véletlenszerûen kiválasztott nagyobb dobozba. Így ügyeskedik tovább, egyre több egymásba skatulyázott kockával, amíg el nem unja, és az egészet úgy ahogy van berakja a legnagyobb kockába. Ezt akkor is megteheti, ha netán maradtak volna felhasználható dobozok. Hányféleképpen rakhat a fentiek szerint egymásba dobozokat Fülöpke?

3.) *A Nagytanács* **35 pont**

A mateklandi tanácsterem rettentô kicsi: nagy részét elfoglalja a néhéz tölgyfaasztal, melynek egyik oldala a bejárat felé néz, a másik három oldal mentén pedig 10 szék áll. A tanácsülésre hagyomány szerint a polgármester lép be elôször, nyomában, szigorúan életkor szerinti sorrendben a 9 tanácsnok: a legidôsebb másodiknak, a legfiatalabb utoljára. A polgármester oda ül, ahová neki tetszik; a tanácsnokok ezután a helyszûke miatt csak olyan székre ülhetnek, amelynek egyik szomszédja már foglalt. Hányféleképpen ülhet össze a Nagytanács?

4.) *Hová merült el...* **20 pont**

A számvevôszék kiderítette, hogy a szuperszakkörben megint elszámoltak valamit: a jobb oldali összeadásban egy ábrándozó olimpikon egy bizonyos *c* számjegy valamennyi elôfordulását egy másik számjegyre, *d*-re cserélte föl, amelyik pedig már elôfordult a felírásban. Mennyi *c* + *d*?

```
   7 4 2 5 8 2
+  8 2 9 4 3 0
--------------------
 1 2 1 2 0 1 2
```

5.) *Az utolsó tánc* **15 pont**

A karneváli mulatság minden évben álarcosbállal ér véget. Az idén 15 lány még éjfél elôtt távozott, a táncra emiatt kétszer annyi fiú maradt, mint ahány lány. Az elsô valcer alatt 45 fiú lesántult -- vagy KöMaL-határidô volt --, így aztán minden hadrafogható fiúra 5 leányzó maradt. Hányan voltak ott kezdetben?

6.) *Lepacázott egyenlet* **25 pont**

A nagyhírû *Serpenyôs* gimnázium egyik matadorának kidôlt a tintásüvege és a dolgozatban kapott másodfokú egyenletbôl csak $x^2 + ... + 12 = 0$ maradt. Mintha az elsôfokú tag együtthatója egész szám lett volna és valami -- vagy valaki -- azt súgta neki, hogy a gyökök is egészek. Ha tényleg ez a helyzet, akkor hány másodfokú egyenletet kell végignéznie?

7.) *Súlyos polinomok* **25 pont**

A Gauss-eliminációval sikeresen eltávolított paca alól újabb feladat bukkant elô:
"Egy *n*-edfokú ($n \geq 0$) P(*x*) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinom súlyának az $s = n + |a_0| + |a_1| + ... + |a_n|$ számot nevezzük. Hány olyan egész együtthatós polinom adható meg, amelynek a súlya 3"?

8.) *Hiányzó hiány* **15 pont**

A városi krónikák följegyezték, hogy a költségvetés hiánya évrôl évre az alábbi különös törvényszerûség szerint alakul: ha az alapítástól számított *n*-edik évben f(*n*) jelöli a hiányt, akkor f(1) = 1 és minden pozitív egészre f(2*n*) = 2f(*n*)+1. Mennyi a hiány az alapítástól számított 1024-edik évben?

9.) *Akikre büszkék vagyunk...* **15 pont**

A *Serpenyôs* gimnázium diákjainak 80 százaléka kitûnô matematikus, 75 százalékuk éltornász, 70 százalékuk pedig nagyon szépen énekel. Legalább hány százalékuk tünteti ki magát mindhárom fenti tantárgyból?

10.) *Titkos telefonszám* **30 pont**

Matekland telefonszámának titkos elôkódjáról tudjuk, hogy ez a legnagyobb olyan tízes számrendszerben felírt négyjegyû szám, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:
-- a számnak és a palindromjának az összege 7216;
-- a számjegyek összege 17;
-- a két szélsô számjegy eltérése legfeljebb 4.

Mi volt a kód?

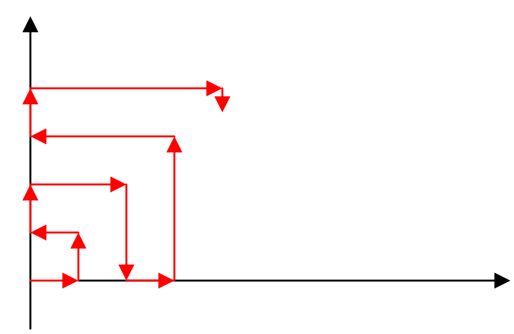
11.) *Már megint kockafej* **30 pont**

Fülöpke már gimnazista, de az óvodában töltött évek nem múltak el fölötte nyomtalanul: dolgozatírás közben például elkérte Eufrozina kalkulátorát és -- ô tudja hogy -- átprogramozta a billentyûzetét, úgyhogy az most a következô elrendezés szerint mûködik:
$0 \to 0$; $1 \to 1$; $2 \to 4$; $3 \to 7$; $4 \to 2$; $5 \to 5$; $6 \to 8$; $7 \to 3$; $8 \to 6$; $9 \to 9$. Ha tehát Eufrozina pl. a 7-es billentyût nyomja meg, akkor a gép 3-mal számol. Eufrozina gyanútlanul bebillentyûzött két számot, összeszorozta ôket és 1996-ot kapott eredményül. Nem tetszett neki a dolog, mert háromjegyû számot várt. Melyiket?

12.) *Sokszögek* **20 pont**

Matekland városának falai egy szabályos sokszöget zárnak körül, melynek belsô szöge fokokban mérve egész szám. Hány különbözô oldalszámú ilyen sokszög van?

13.) *Peripatetikus matematika* **60 pont**



Egy különösen nehéz KöMaL feladaton töprengve Titusz sétálgatni kezd. A sebessége állandó, 1 méter percenként – ennyire töpreng -- az útvonala pedig az *ábrán* látható: az elsô percben 1 métert andalog jobbra, aztán befordul – ennyire okos --, aztán balra… . Hol lesz a 2005. perc -- ennyire nehéz a feladat -- leteltével?
Válaszul a helyzete koordinátáinak az összegét adjátok meg.

14.) *Elveszett feladat* **40 pont**

Egy régi fóliánson találták a következô feladatot: „*a*, *b* és *c* egész számok, melyekre $a + b + c = 9000$, továbbá $a\log_{200} 5 + b\log_{200} 2 = c$.” Mennyi *b* értéke?

15.) *Enyves munkában* **50 pont**

Matekland központi bankjában a páncélszekrény legfeljebb négyjegyû titkos kódját a fôpénztáros minden este átállítja: az új kódot a régibôl készíti el úgy, hogy annak háromszorosában elhagyja a legelsô számjegyet. Egy elvetemült pénztáros valamelyik éjjel megtudta, hogy az aznapi kombináció nem tartalmaz páratlan számjegyet. Másnap éjjel egy ôr kiszagolta, hogy az aznapi kód egyik jegye sem osztható 3-mal. A rákövetkezô éjjel Enyves, a hírhedt besurranó tolvaj megpróbálta kinyitni a páncélszekrényt; néhány sikertelen kisérlet után arra jutott, hogy az aznapi kód jegyei kivétel nélkül oszthatók kell legyenek 3-mal. Másnap reggel Enyves kihallgatta a pénztáros és az ôr beszélgetését és megtudta mindazt, amit ôk. Éjszaka aztán növekvô sorrendben próbálta ki a megmaradt lehetôségeket és legutoljára sikerült kinyitnia a páncélszekrényt. Mi volt a kód aznap este?

16.) *Égigérô háromszög* **65 pont**

A város fôterén egy háromszög alakú emlékmû épült -- számokból. A háromszöget a 0, 1, 2, 3, 4,… számok szegélyezik az ábra szerint, a belsejében pedig minden szám az alatta lévô kettô összege. Az *n*-nel kezdôdô sorban álló számok összegét jelöljük f(*n*)-nel. Mi a maradék, ha f(100)-at 100-zal osztjuk?

4 7 8 7 4
3 4 4 3
2 2 2
1 1
0

17.) *Ezt süsd ki!* **85 pont**

Matekland sütôdéjében messze földön híres mandulás sütemények készülnek. Egy kerekes puszedli elkészítése három fázisban történik: az elsô kemencében 6 percig sül, a másodikban 12 percig, végül a harmadikban18 percig. A puszedlis kerék elôször az elsô kemencében sül 18 percig, azután a másodikban 12 percig, végül a harmadikban 6 percig. A kemencék minden nap leállnak valamennyi idôre: az elsô legalább 2 órára, a második legalább 5 órára, a harmadik pedig legalább 1 órára. Hányféleképpen lehet megadni a nemnegatív egészekbôl álló (k_p, p_k) számpárt úgy, hogy egyetlen nap alatt meg lehessen sütni k_p darab kerekes puszedit és p_k darab puszedlis kereket?

18.) *Jól bevásároltunk...* **70 pont**

Plajbász, az akkurátus építész bevásárlóközpontot tervez a város szélén. A rendelkezésre álló telek a 120 méter oldalú *ABCD* négyzet. Mateklandban az az elôírás, hogy a bevásárlóközpontokat két paralelogramma közös részén kell felépíteni. Plajbász azt javasolja, hogy az egyik paralelogramma 60 méter hosszú szemközti oldalai a négyzet *AD* és *BC* oldalain legyenek, másikuk ugyancsak 60 méter hosszú szemközti oldalai pedig a négyzet másik két oldalán, *AB*-n és *CD*-n. Legyen $T_{\max}$ és $T_{\min}$ az így felépíthetô bevásárlóközpont maximális illetve minimális alapterülete. Mennyi $T_{\max} - T_{\min}$?

19.) *A parkban* **85 pont**

A város parkjában most avatják a kockafejûek szobrát, a nagyhírû Smirgli alkotását. A mester egy 12 egységnyi élû kockában egy olyan síkra, amelyik a kockát szabályos hatszögben metszi, mindkét irányban végtelen hatoldalú egyenes hasábot faragott, amelynek a hatszögmetszet volt az alaplapja. Amikor végzett, lesmirglizte a kilógó részeket és meg is volt a szobor: a kocka és a hasáb közös része. Mennyi a térfogata?

20.) *Mi fô a fazékban?* **80 pont**

Eufrozina és Fülöpke azóta kibékültek és a büfében kártyáznak: a játék a hagyományos Fekete Leves. A ravasz Fülöpkénél három lap maradt, egy kôr, egy káró és egy treff, Eufrozinának még négy lapja van, minden színbôl egy-egy. Fülöpke következik, húz egy lapot Eufrozinától és ha ezzel lesz két egyfoma színû (a francia kártyában négy "szín" van) lapja, azokat lerakhatja, ha nem, akkor a kezében lévô négy lappal játszik tovább. Most Eufrozina jön, aki Fülöpke lapjai közül húz egyet hasonló feltételekkel és így tovább. A játékot az nyeri, aki valamennyi lapját le tudja rakni. Hány százalék a valószínûsége, hogy Fülöpke nyer?

21.) *Cserebere* **50 pont**

A rablás hírére nyomban összehívták a bank hattagú felügyelôbizottságát. A 6 feldúlt tanácsnok véletlenszerûen üli körül a hatszemélyes kerek asztalt, nem törôdnek az odakészített hat darab röpdolgozattal, amelyek pedig névre szólnak. Egy elavult szabály szerint becsöngetés után már nem lehet felugrálni, így aztán a nemes tanácsnokok csereberélni kezdik a feladatsorokat: hogy kerüljék a feltûnést, csak egymás mellett ülôk cserélnek és ôk is csak abban az esetben, ha mindegyiküknél a másiknak szóló feladatsor van. Hányféle módon rendezôdhetnek el a feladatsorok a tanácsnokok elôtt, miután befejezôdik a cserebere? (Megkülönböztetjük az olyan elrendezéseket, amelyek az asztal egy egybevágósági transzformációjával egymásba vihetôk.)

22.) *A szökôkút* **60 pont**

Plajbász szökôkutat is szeretne a bevásárlóközpontban. A szökôkút alapja egy 4500 cm^2 területû egyenlô szárú háromszög alakú medence. Ami a vízsugár elhelyezését illeti, a kockafejûek és a víz különös viszonyára való tekintettel Plajbász óvatosan fog a dologhoz: a háromszög tetszôleges belsô P pontjára elkészíti a P tükörképét a három oldalra, majd tekinti az így kapott háromszög S súlypontját, mint a vízsugár egy lehetséges pozícióját. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az így adódó S pontok alkotnak, miközben P befutja a háromszög belsejét?

23.) *A trapéz* **40 pont**

A város központjában trapéz alakú park terül el. A kisebbik alapjának a hossza 90 méter, átlóinak felezôpontját pedig 5 méter hosszú kerítés köti össze. Milyen hosszú a nagyobbik alap?

24.) *Demokrácia* **45 pont**

Titusz és Fülöpke a polgármesteri címért verseng. A választáson ugyanannyi szavazatot kaptak, így a hagyományos mateklandi „futtában sült csirke” módszerrel dôl el, melyikük legyen a polgármester. Egy urnába beteszik a számokat 1-tôl 5-ig, visszatevéssel kihúznak hármat és ha a kihúzott számok ebben a sorrendben a, b és c, akkor Titusz a befutó – íme a különös elnevezés részleges magyarázata –, amennyiben $ab + c$ páros. Ha ez a mennyiség páratlan, akkor Fülöpke a polgármester. Fülöpke természetesen ágálni kezd: szerinte a nyakatekert szárnyas reformokra szorul. Hány százalék a valószínûsége, hogy $ab + c$ páros? (Ha az eredmény százalékban kifejezve sem egész, akkor az egész részét írjátok válaszul.)