Kardos-Montágh Matematikaverseny 2021.

III. forduló
Cauchy-Schwarz-féle egyenlőtlenség, Titu-lemma

3.1. Elméleti összefoglaló

Kezdjük egy nagyon közkedvelt segédeszközzel, a Titu-lemmával. Nagyon sok – egyébként nehéz – állítás gyorsan és elegánsan bizonyítható segítségével. Megértése és bizonyítása nem igényel sok előismeretet. Később kiderítjük, hogy egy általánosabb tétel speciális esete, de most következő formájában könnyen megjegyezhető és igazán kényelmes a használata.

VII. tétel (Titu-lemma): *Legyen $n \geq 2$ pozitív egész, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tetszőleges valós számok, továbbá $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ldots \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}$.

Bizonyítás: Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Legyen először $n = 2$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} \geq \frac{(x_1 + x_2)^2}{a_1 + a_2}.$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $a_1 a_2 (a_1 + a_2)$ számmal:

$$a_2(a_1 + a_2)x_1^2 + a_1(a_1 + a_2)x_2^2 \geq a_1 a_2 (x_1 + x_2)^2.$$

A műveletek elvégzése és rendezés után:

$$a_1 a_2 x_1^2 + a_2^2 x_1^2 + a_1^2 x_2^2 + a_1 a_2 x_2^2 \geq a_1 a_2 x_1^2 + 2a_1 a_2 x_1 x_2 + a_1 a_2 x_2^2,$$

$$a_2^2 x_1^2 - 2a_1 a_2 x_1 x_2 + a_1^2 x_2^2 \geq 0.$$

A bal oldalon egy kéttagú kifejezés négyzete van:

$$(a_2 x_1 - a_1 x_2)^2 \geq 0.$$

Tehát igaz egyenlőtlenséget kaptunk. Csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát igaz az eredeti állítás is $n = 2$ esetén. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a_2 x_1 = a_1 x_2$, azaz $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2}$.

Most tegyük fel, hogy $n = k$ darab tört esetén már igaz a tétel állítása és legyen $n = k + 1$. Ekkor a bizonyítandó állítás:

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ldots \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1})^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}}.$$

Most az első k darab törtet alulról megbecsülhetjük az indukciós feltevés alapján:

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ldots + + \frac{x_k^2}{a_k} + \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} + \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}}.$$

A jobb oldalon látható két törtre pedig tudjuk alkalmazni az $n = 2$ esetben részletesen leírt becslést, a tételt $n = 2$-re:

$$\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} + \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1})^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}}.$$

Az egyenlőség feltétele $n = k$-ra:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_k}{a_k} = t.$$

Eszerint $x_i = ta_i$, minden i-re, vagyis

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} = \frac{t \cdot a_1 + t \cdot a_2 + \ldots + t \cdot a_k}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} = t.$$

Ezután az $n = 2$ esetre bizonyított egyenlőségi feltétel alapján azonnal kapjuk, hogy egyenlőség esetén $\frac{x_{k+1}}{a_{k+1}} = t$ is teljesül. Ezzel a tételt igazoltuk.

Néhány feladaton és korábbi tétel bizonyításán keresztül bemutatjuk a Titu-lemma alkalmazását. Először vegyük ismét a második forduló összefoglalójában már tárgyalt Nesbitt-egyenlőtlenséget:

2. kidolgozott feladat: Legyenek az a, b, c pozitív számok. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Megoldás: Bővítsük mindhárom törtet a számlálójával, majd a törtek összegét becsüljük meg alulról a Titu-lemma segítségével:

$$\frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2ab+2bc+2ca}.$$

Már csak azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{(a+b+c)^2}{2ab+2bc+2ca} \geq \frac{3}{2}.$$

Beszorzás és rendezés után:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4ab + 4bc + 4ca \geq 6ab + 6bc + 6ca,$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0,$$
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a = b = c$.

Második alkalmazásként egy már ismert tételre adunk új bizonyítást.

II-III. tétel: *Legyen $n \geq 2$ pozitív egész, az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy a számok aritmetikai közepe nagyobb vagy egyenlő, mint a harmonikus közepük, azaz*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha az a_i számok mind egyenlők.

Bizonyítás: Vegyük az a_i számok reciprokainak összegét.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

Itt a számlálókban álló egyesek tekinthetők négyzeteknek, legyenek ezek az x_i-k a Titu-lemmában. Mostmár alkalmazhatjuk a lemmában szereplő alsó becslést:

$$\frac{1^2}{a_1} + \frac{1^2}{a_2} + \ldots + \frac{1^2}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Átrendezve ez éppen a bizonyítandó állítást adja. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \ldots = \frac{1}{a_n}$, amikor mindegyik szám egyenlő.

Még érdekesebb a négyzetes és a számtani közép közötti egyenlőtlenség bizonyítása Titu-lemmával.

IV. tétel: *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ pozitív számok aritmetikai közepe nem nagyobb, mint e számok kvadratikus közepe. A két közép akkor és csak akkor egyezik meg, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. A jelölésekkel: $A_n \leq Q_n$.*

Bizonyítás: Tekintsük az a_i számok négyzetösszegét. Az egyes négyzetek tekinthetők 1 nevezőjű törteknek is. Ezután már használni is tudjuk a Titu-lemmát:

$$\frac{a_1^2}{1} + \frac{a_2^2}{1} + \ldots + \frac{a_n^2}{1} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n}.$$

Mindkét oldalt n-nel osztva majd négyzetgyököt vonva a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n^2},$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

Egyenlőség a Titu-lemma szerint $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ esetén.

Végül rátérünk a Cauchy-Bunyakovszkíj-Schwarz-féle egyenlőtlenség (röviden CBS-egyenlőtlenség) tárgyalására. Látni fogjuk, hogy a Titu-lemma ennek csak egy igen speciális esete.

VIII. tétel: (CBS) *Ha az a_i és b_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tetszőleges valós számok, akkor*

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha az a_i és b_i számok arányosak, azaz van $\lambda \neq 0$ szám, amelyre $b_i = \lambda \cdot a_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Bizonyítás: Ha az a_i vagy a b_i számok mindegyike nulla, akkor nyilvánvalóan igaz az állítás. A továbbiakhoz vegyük a következő négyzetösszeget:

$$(a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \ldots + (a_n x - b_n)^2.$$

Ez a kifejezés az x változó mindegyik értékére legalább nulla. A zárójelek felbontása és rendezés után ez az összeg az x másodfokú polinomja.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Mivel ez teljes négyzetek összege ezért legfeljebb egyszer veheti fel a nulla értéket, diszkriminánsa legfeljebb nulla.

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \leq 0.$$

Osztva 4-gyel és rendezve épp a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha a másodfokú polinomnak van zérushelye. Ez pedig csak az az x, lehet, amelyre mindegyik $a_ix = b_i$.

Valójában a Titu-lemma ennek az általános tételnek a speciális esete.

VII. tétel: Titu-lemma *Legyen $n \geq 2$ pozitív egész, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tetszőleges valós számok, továbbá $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ldots \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}$.

Bizonyítás: Az áttekinthetőség érdekében szerepeljenek most a CBS-egyenlőtlenségben u_i és v_i számok. Legyen továbbá

$$u_i = \frac{x_i}{\sqrt{a_i}}, \quad v_i = \sqrt{a_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

A CBS-egyenlőtlenségbe helyettesítve:

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n \leq (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2),$$

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{a_1}} \cdot \sqrt{a_1} + \frac{x_2}{\sqrt{a_2}} \cdot \sqrt{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{a_n}} \cdot \sqrt{a_1}\right)^2 \leq \left(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n}\right)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leq \left(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n}\right)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Az $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$-nel osztva éppen a Titu-lemma eredeti alakját kapjuk.

$$\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n}.$$

Felvetődhet, hogy miért van mégis külön neve és „saját élete" a Titu-lemmának? Erre nagyon egyértelmű és belátható válasz, hogy elsősorban azért, mert a legtöbb feladatban nagyon nehéz megtalálni azokat a szám n-eseket, amelyekkel használható a CBS-egyenlőtlenség, míg a Titu-lemma alakja és felhasználhatósága valóban nagyon kényelmes.

3. kidolgozott feladat: Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ x^2+2y^2+3z^2=66. \end{cases}$$

Megoldás: Alkalmazzuk a CBS-egyenlőtlenséget az $x, y\sqrt{2}, z\sqrt{3}$ és az $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ számhármasokra.

$$x \cdot 1 + y\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + z\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \leq (x^2+2y^2+3z^2)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right).$$

Ezt természetesen tudjuk egyszerűbb alakban is írni:

$$(x+y+z)^2 \leq (x^2+2y^2+3^2)\frac{11}{6}.$$

A két megadott egyenlet felhasználásával azt látjuk, hogy

$$121 = (x+y+z)^2 = (x^2+2y^2+3^2)\frac{11}{6} = 66 \cdot \frac{11}{6} = 121,$$

A CBS egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, emiatt

$$\frac{x}{1} = \frac{y\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \iff x = 2y = 3z.$$

Ez alapján az egyenletrendszer megoldása: $x=6,\ y=3,\ z=2$.

A harmadik forduló feladatai

A sikeres szerepléshez nem szükséges az összes feladatot megoldani. Az eredményeket a három forduló teljesítménye alapján és évfolyamonként külön-külön értékeljük.

Az alábbi feladatok többségét nem csak az elméleti összefoglalóban szereplő segédeszközök segítségével lehet megoldani. A versenyben természetesen minden helyes megoldást maximális pontszámmal értékelünk.

Elvileg különböző második megoldásra az eredeti pontszám legfeljebb 50 %-a adható.

11. Legyenek a, b és c pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\geq 1. \qquad \text{(6 pont)}$$

12. Oldja meg az egyenletet a valós számok lehetséges legbővebb részhalmazán:

$$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}. \qquad \text{(6 pont)}$$

13. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\frac{ab+bc+ca}{a^3+b^3+c^3}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right). \qquad \text{(8 pont)}$$

14. Mutassuk meg, hogy ha a, b, $c\in]0,1[$, akkor

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1. \qquad \text{(10 pont)}$$

15. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq a+b+c \qquad \text{(10 pont)}$$

Beküldési határidő: **2021. április 19. 23^{59}**
Beküldési cím: matoktport@gmail.com
Email tárgy: III. forduló megoldásai

A megoldásokat kérjük egy (1!) levélben beküldeni a könnyebb feldolgozás érdekében. A megoldások csatolás formájában kerüljenek a levélbe, ha lehet PDF formátumban. A csatolt file neve ékezetek nélküli legyen és tartalmazza a beküldő nevét, továbbá a forduló sorszámát is (esetleg a feladat sorszámát, ha csak 1 feladatot tartalnaz). Szóköz helyett a "_" karakter alkalmazandó! Példák csatolt file nevekre:
nagyistvan_fordulo3.pdf
kisspista_fordulo3_feladat06.pdf