Kardos-Montágh Matematikaverseny 2021.

II. forduló

Rendezési tétel, Csebisev-egyenlőtlenség

A második fordulóra választott rendezési tétel és az ahhoz kapcsolódó Csebisev-egyenlőtlenség több szempontból is nagyon hasznos segédeszközök. Egyrészt segítségükkel gyors, tömör, jól áttekinthető bizonyítások adhatók. Amint rendelkezésre áll ez a tétel, korábban körülményesen, esetleg esetekre bontással megoldható problémák is egységesen kezelhetők. Másrészt, és ez is nagyon fontos, tetszőleges valós számokra teljesülnek, így bővül az alkalmazási kör.

2.1. Elméleti összefoglaló

Először azt tisztázzuk, hogy mikor nevezünk két valós szám n-est *azonosan rendezett*nek, illetve *ellentétesen rendezett*nek.

Definíció: Legyen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ két valós szám n-es $(n \geq 2)$.

A két szám n-es **azonosan (ellentétesen) rendezett**, ha bármely i-re és j-re $(i \neq j)$, $a_i \leq a_j$-ből következik, hogy $b_i \leq b_j$ $(b_i \geq b_j)$.

A rendezési tétel a következő:

V. tétel: *Legyen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ két valós szám n-es, továbbá $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ egy permutációja. Az $a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \ldots + a_n \cdot p_n$ összeg értéke akkor maximális (minimális), ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $p_1, p_2, \ldots, p_n$ szám n-es azonosan (ellentétesen) rendezett.*

Bizonyítás: Tudjuk, hogy a $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ szám n-es tagjainak véges sok (legfeljebb $n!$) különböző sorrendje lehet. Emiatt biztosan lesz olyan $a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \ldots + a_n \cdot p_n$ összeg, amely maximális, illetve olyan is, amely minimális.

Csak azt bizonyítjuk be, hogy a maximális értéket azonos rendezettség esetén megkapjuk.

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ két nem azonosan rendezett szám n-es. Ekkor biztosan van olyan i és j index, hogy $a_i \leq a_j$, ugyanakkor $b_i > b_j$. Legyen

$$S = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_i \cdot b_i + \ldots + a_j \cdot b_j + \ldots + a_n \cdot b_n.$$

Ezután képezzük az S' összeget úgy, hogy a b_i és b_j elemeket felcseréljük.

$$S' = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_i \cdot b_j + \ldots + a_j \cdot b_i + \ldots + a_n \cdot b_n.$$

Most pedig vegyük a két összeg különbségét.

$$S' - S = a_i \cdot b_j + a_j \cdot b_i - a_i \cdot b_i - a_j \cdot b_j = (a_i - a_j)(b_j - b_i) \geq 0.$$

Vagyis ezzel a cserével biztosan nem csökkent az összeg. Egyenlő is csak akkor maradhatott, ha $a_i = a_j$.

Tehát, ha haladunk a két szám n-es azonos rendezettsége felé, akkor a párokból képzett összeg biztosan nem csökken egyetlen lépésben sem. Mivel létezik maximum azt el is érjük az azonos rendezettség esetén.

Ugyanezen az úton bizonyítható, hogy a legkisebb összeget pedig az ellentétes rendezettségnél biztosan elérjük.

Ez a tétel több versenyző számára is újszerű lehet, ezért a továbbiakban néhány alkalmazást is bemutatunk.

Alkalmazások

1. kidolgozott feladat: *Legyenek a, b és c pozitív valós számok. Mutassuk meg, hogy*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Megoldás: Lévén az a, b és c pozitív számok, a nagyság szerinti sorrendjük megegyezik a négyzeteik nagyság szerinti sorrendjével. Tehát ha az a, b, c közötti sorrendet ismerjük, akkor ugyanez lesz az a^2, b^2 és c^2 nagyság szerinti sorrendje is. A két három tagú sorozat tagjaiból képzett összegek közül tehát mindenképpen a legnagyobb lesz:

$$a \cdot a^2 + b \cdot b^2 + c \cdot c^2.$$

Ha másként párosítjuk a két sorozat tagjait, akkor legfeljebb ekkora összeget kaphatunk. Ezek szerint nem lesz nagyobb a következő párosítású összeg sem:

$$a \cdot c^2 + b \cdot a^2 + c \cdot b^2.$$

Egyenlőséget csak akkor kaphatunk, ha mindegyik cserénél vagy az elsőfokúak, vagy a másodfokúak egyeznek meg, de ebben a speciális esetben ez éppen azt jelent, hogy a számok mind egyformák. Ezzel beláttuk, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

2. kidolgozott feladat: Legyenek az a, b, c pozitív számok. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Megoldás: Itt az a szerencsés, a matematikában sokszor előforduló, helyzet van, hogy a bizonyítandó állítás két változó/betű cseréje esetén változatlan marad. Tehát szabadon megadhatjuk a nagyság szerinti sorrendet, hiszen ha más lenne a sorrend, akkor a betűk cseréjével azonnal mégis elérhető lenne ez a helyzet.

Legyen a fentiek miatt az egyszerűség kedvéért

$$a \leq b \leq c.$$

Ekkor az is igaz, hogy

$$a + b \leq c + a \leq b + c,$$

és ebből azonnal következően

$$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}.$$

Az a, b, c és $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ számhármasok ebben a sorrendben azonosan rendezettek. Írjunk fel még két további párosítást is.

$$a \cdot \frac{1}{b+c} + b \cdot \frac{1}{c+a} + c \cdot \frac{1}{a+b} \geq a \cdot \frac{1}{a+b} + b \cdot \frac{1}{b+c} + c \cdot \frac{1}{c+a},$$
$$a \cdot \frac{1}{b+c} + b \cdot \frac{1}{c+a} + c \cdot \frac{1}{a+b} \geq a \cdot \frac{1}{c+a} + b \cdot \frac{1}{a+b} + c \cdot \frac{1}{b+c},$$

A két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva:

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq \frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} = 3.$$

Mindkét oldalt kettővel osztva a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Az egyenlőség akkor állhat fenn, ha bármelyik "cserénél" a két szám, vagy a két összeg egyezik meg. Mindkettőből azonnal két szám egyenlőségére következtethetünk, ahonnan már belátható, hogy egyenlőség csak abban az esetben lehet, ha a harmadik szám is ezekkel megegyező. Pl. legyen $a = b$ ekkor az egyenlőséghez

$$\frac{a}{a+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{c}{2a} = \frac{3}{2},$$

Innen

$$\frac{2a}{a+c} + \frac{c}{2a} = \frac{3}{2},$$

Mindkét oldalt $2a(a+c)$-vel szorozva és rendezve:

$$4a^2 + ac + c^2 = 3a^2 + 3ac,$$

$$a^2 - 2ac + c^2 = 0,$$

$$(a-c)^2 = 0,$$

$$a = c.$$

Egyenlőség tehát valóban csak abban az esetben, ha a három szám megegyezik.

Ez az ismert Nesbitt-egyenlőtlenség, amelynek egy-egy általánosítása az OKTV-n is kitűzött feladat volt, illetve a teljes általánosítása egy darabig még megoldatlan problémaként is ismertté vált (ún. Shapiro-egyenlőtlenség).

A rendezési tétel a számtani- és mértani közép közötti egyenlőtlenség igazolására is használható:

II. tétel: *Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ pozitív számok geometriai közepe nem nagyobb, mint e számok aritmetikai közepe. A két közép akkor és csak akkor egyezik meg, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.*

Bizonyítás: Jelöljük az x_i számok geometriai közepét $G(x)$-szel. A rendezési tétel alkalmazásához válasszuk a két szám n-est a következőképpen:

$$a_1 = \frac{x_1}{G(x)}; \quad a_2 = \frac{x_1 x_2}{G^2(x)}; \quad \ldots; \quad a_n = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{G^n(x)} = 1.$$

A másik szám n-es pedig rendre az előbbiek reciprokaiból álljon.

$$b_1 = \frac{1}{a_1}; \quad b_2 = \frac{1}{a_2}; \quad \ldots, \quad b_n = \frac{1}{a_n} = 1.$$

A reciprokok miatt így a két sorozat ellentétesen rendezett, tehát egy másik permutációját véve a b_i-knek a párosításokban nem csökken az összeg:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{a_n} = n \leq$$

$$\leq a_1b_n + a_2b_1 + a_3b_2 + \ldots + a_nb_{n-1} =$$

$$= \frac{x_1}{G(x)} + \frac{x_1x_2}{G^2(x)} \cdot \frac{G(x)}{x_1} + \frac{x_1x_2x_3}{G^3(x)} \cdot \frac{G^2(x)}{x_1x_2} + \ldots + \frac{x_1x_2\ldots x_n}{G^n(x)} \cdot \frac{G^{n-1}(x)}{x_1x_2\ldots x_{n-1}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{G(x)}.$$

Tehát

$$n \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{G(x)}, \quad \text{azaz} \quad G(x) \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

A cseréknél minden esetben csak akkor lehet egyenlőség, ha a két szám egyenlő, emiatt az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Végül még egy fontos alkalmazás a rendezési tételre, amely önmagában is egy érdekes és hasznos eredmény, a **Csebisev-egyenlőtlenség**:

VI. tétel: *Legyen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ két valós szám n-es, Ha a két szám n-es azonosan rendezett, akkor*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n},$$

ha pedig ellentétesen rendezett a két szám n-es, akkor

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

Bizonyítás: A két szám n-es azonosan rendezett, így teljesülnek a következő egyenlőségek és egyenlőtlenségek:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,$$

$$a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,$$

$$a_1b_3 + a_2b_4 + \ldots + a_nb_2 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,$$

$$\vdots$$

$$a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_nb_{n-1} \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Adjuk össze az egyenlőtlenségeket majd emeljünk ki a bal oldalon $(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$-et.

$$a_1((b_1 + b_2 + \ldots + b_n) + a_2(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) + \ldots a_n(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leq$$

$$\leq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n).$$

Mindkét oldalt n^2-tel osztva a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n},$$

Ellentétesen rendezett szám n-esekre ugyanezzel a módszerrel bizonyítható az állítás.

Megjegyzések:

1, A rendezési tétel felhasználási lehetőségeiről két magyar matematikus Szűcs Adolf és Gyires Béla írt alapvető cikket az 1940-es évek elején. Emiatt sokszor Szűcs Adolf-egyenlőtlenségnek is szokták nevezni a rendezési tételt.

2. A fenti összefoglaló Ábrahám Gábor két könyve alapján készült: Nevezetes egyenlőtlenségek (MOZAIK Kiadó, 1995.), Egyenlőtlenségek I.-II. (ZALAMAT Alapítvány, 2017.)

A második forduló feladatai

A sikeres szerepléshez nem szükséges az összes feladatot megoldani. Az eredményeket a három forduló teljesítménye alapján és évfolyamonként külön-külön értékeljük.

Az alábbi feladatok többségét nem csak az elméleti összefoglalóban szereplő segédeszközök segítségével lehet megoldani. A versenyben természetesen minden helyes megoldást maximális pontszámmal értékelünk.

Elvileg különböző második megoldásra az eredeti pontszám legfeljebb 50 %-a adható.

6. Legyenek a, b, c egy háromszög oldalainak hosszúságai. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3. \qquad \text{(6 pont)}$$

7. Gombóc Artúr a születésnapjára összesen 100 szelet csokit kapott, négyféle ízben: 17 szelet kávés, 26 szelet kókuszos, 42 szelet mogyorós és 15 szelet marcipános. Artúr sajnos gyomorrontást kap estére, ha az alábbi események bármelyike bekövetkezik a születésnapján:

   (1) Valamelyik ízű csokoládéból megette az összeset.

   (2) Van két olyan íz is, amelyek mindegyikéből megette a csokik több, mint felét.

   (3) Van három olyan íz is, amelyek mindegyikéből megette a csokik több, mint a harmadát.

   (4) Mind a négy ízből megette a csokik több mint negyedét.

   Legfeljebb hány csokit ehet meg a születésnapján Gombóc Artúr?

   (6 pont)

8. Az a, b, c pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq a+b+c. \qquad \text{(8 pont)}$$

9. Három nemnegatív valós szám a, b és c összege 1. Mutassuk meg, hogy

$$7(ab+bc+ca)\leq 2+9abc. \qquad \text{(10 pont)}$$

10. Legyenek x_1, x_2, …, x_n különböző pozitív egész számok. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{x_1^2}{1^2}+\frac{x_2^2}{2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{n^2}\geq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}. \qquad \text{(10 pont)}$$

Beküldési határidő: **2021. március 29. 23^{59}**
Beküldési cím: matoktport@gmail.com
Email tárgy: II. forduló megoldásai

A megoldásokat kérjük egy (1!) levélben beküldeni a könnyebb feldolgozás érdekében. A megoldások csatolás formájában kerüljenek a levélbe, ha lehet PDF formátumban. A csatolt file neve ékezetek nélküli legyen és tartalmazza a beküldő nevét, továbbá a forduló sorszámát is (esetleg a feladat sorszámát, ha csak 1 feladatot tartalnaz). Szóköz helyett a "_" karakter alkalmazandó! Példák csatolt file nevekre:
nagyistvan_fordulo2.pdf
kisspista_fordulo2_feladat06.pdf