VI. NEVEZETES EGYENLŐTLENSÉGEK

Ebben a fejezetben néhány általánosan ismert algebrai és analízisbeli egyenlőtlenséggel foglalkozunk. Az egyenlőtlenségek bizonyításával, alkalmazásával, illetve néhány geometriai egyenlőtlenséggel ismerkedünk meg.

Fontosabb definíciók és tételek

1. definíció: *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok algebrai (számtani) közepén értjük és A_n-nel jelöljük az*

$$A_n = \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

mennyiséget.

I. TÉTEL: *Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok legkisebbikét (egyik legkisebbikét)* min a_i-vel, *legnagyobbikát (egyik legnagyobbikát) pedig* max a_i-*vel jelöljük, akkor*

$$\min a_i \leqq A_n \leqq \max a_i.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat nem csökkenő sorrendbe rendeztük, az átrendezéssel kapott permutáció elemeit jelöljük $b_1, b_2, \ldots, b_n$-nel, ahol

$$\min a_i = b_1, \quad \max a_i = b_n \quad \text{és} \quad b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n.$$

Ekkor

$$\min a_i = b_1 \leqq A_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \leqq b_n = \max a_i,$$

hiszen

$$nb_1 \leqq b_1+b_2+\ldots+b_n \leqq nb_n,$$

azaz

$$0 \leqq (b_1-b_1)+(b_2-b_1)+\ldots+(b_n-b_1),$$

illetve

$$(b_1-b_n)+(b_2-b_n)+\ldots+(b_n-b_n) \leqq 0$$

ekvivalens átalakítások után.

II. TÉTEL: *Ha a tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számhoz $(n+1)$-edik elemként hozzávesszük az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok aritmetikai közepét, akkor az $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ számok aritmetikai közepe megegyezik az eredeti n darab szám aritmetikai közepével, ahol $a_{n+1} = A_n$.*

E tételt gyakran fel fogjuk használni más tételek igazolása során.

Bizonyítás: Definíció szerint $A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots,+a_n)$

$$\text{és } A_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\cdot(a_1+\ldots+a_n+A_n) =$$

$$= \frac{1}{n+1}(nA_n+A_n) = \frac{n+1}{n+1}A_n = A_n.$$

2. definíció: *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nemnegatív valós számok geometriai (mértani) közepén értjük és G_n-nel jelöljük a*

$$G_n = (a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

számot.

III. TÉTEL: Az *I. tétel jelöléseit használva:*

$$\min a_i \leqq G_n \leqq \max a_i.$$

Bizonyítás: Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nemnegatív számok legnagyobbika 0, akkor az állítás azonnal adódik. Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok legnagyobbika nem 0 (egyik legnagyobbika nem 0), akkor egy maximális elemet például az a_k elemet választva az $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqq a_k$ állítás bizonyítandó.

Egyenlőtlenségünkkel ekvivalens az n-edik hatványra emeléssel kapott $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leqq a_k^n$, illetve az

$$\frac{a_1}{a_k} \cdot \frac{a_2}{a_k} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_k} \leqq 1$$

egyenlőtlenség. A kapott egyenlőtlenség pedig helyes, hiszen $a_k = \max a_i$ miatt $0 \leqq \frac{a_j}{a_k} \leqq 1$ ($j=1, 2, \ldots, n$)-re. Teljesen hasonló módon igazolható, hogy $\min a_i \leqq G_n$.

IV. TÉTEL: *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nemnegatív számok geometriai közepe nem nagyobb, mint e számok aritmetikai közepe. A két közép akkor és csak akkor egyezik meg, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Jelöléseinkkel: $G_n \leqq A_n$.*

Bizonyítás: Lényegében a teljes indukciós bizonyítási eljárást fogjuk követni.

a) $n=2$-re a $\sqrt{a_1 a_2} \leqq \frac{a_1 + a_2}{2}$ egyenlőtlenség teljesülése ekvivalens a négyzetreemeléssel és rendezéssel kapott $0 \leqq (a_2 - a_1)^2$ mindig igaz egyenlőtlenséggel, sőt látható, hogy $G_2 = A_2$ akkor és csak akkor, ha $a_1 = a_2$.

b) Most azt igazoljuk, hogy $G_n \leqq A_n$ teljesülése esetén fennáll, hogy $G_{2n} \leqq A_{2n}$ tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nemnegatív elemekre. Mivel

$$\begin{aligned} G_{2n} &= \sqrt[2n]{(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)(a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n})} = \\ &= \sqrt[2n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \cdot \sqrt[2n]{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \ldots \cdot a_{2n}} = \\ &= \sqrt{G_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \cdot \sqrt{G_n(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n})}, \end{aligned}$$

ezért az indukciós feltevés szerint

$$G_n \leqq \sqrt{A_n(a_1, \ldots, a_n)} \cdot \sqrt{A_n(a_{n+1}, \ldots, a_{2n})},$$

ahonnan az

$$A_n(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{és} \quad A_n(a_{n+1}, \ldots, a_{2n})$$

számokra alkalmazva az *a)* pontban bizonyított egyenlőtlenséget:

$$G_{2n} \leqq \sqrt{A_n(a_1, \dots, a_n)} \cdot \sqrt{A_n(a_{n+1}, \dots, a_{2n})} =$$

$$= \sqrt{A_n(a_1, \dots, a_n) \cdot A_n(a_{n+1}, \dots, a_{2n})} \leqq \frac{A_n(a_1, \dots, a_n) + A_n(a_{n+1}, \dots, a_{2n})}{2} =$$

$$= \frac{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2n} +$$

$$+ \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{2n} = A_{2n}.$$

Ezzel a *b)* pont állítását igazoltuk.

c) Eddig igazoltuk a $G_n \leqq A_n$ relációt azokban az esetekben, mikor n 2 hatvány. Tegyük fel, hogy $2^k < n < 2^{k+1}$, azaz n nem 2 hatvány. Ekkor az $a_1, a_2, \dots, a_n$ n számú elemet egészítsük ki 2^{k+1} számú elemmé, az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemekhez hozzávéve az $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{2^{k+1}} = A_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = A_n$ elemeket!

A *b)* pontban bizonyítottak szerint a most már 2^{k+1} számú elemre $G_{2^{k+1}} \leqq A_{2^{k+1}}$. Részletesen kiírva:

$$\sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \underbrace{A_n \cdot A_n \cdot \ldots \cdot A_n}_{(2^{k+1}-n)\text{-szer}}} = \sqrt[2^{k+1}]{G_n^n A_n^{(2^{k+1})-n}} \leqq$$

$$\leqq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + (2^{k+1} - n) A_n}{2^{k+1}},$$

azaz

$$\sqrt[2^{k+1}]{G_n^n A_n^{(2^{k+1})-n}} \leqq \frac{nA_n + (2^{k+1} - n) A_n}{2^{k+1}} = A_n$$

a II. tételnek megfelelően. Tehát

$$\sqrt[2^{k+1}]{G_n^n A_n^{(2^{k+1})-n}} \leqq A_n.$$

Mindkét oldalt 2^{k+1}-edik hatványra emelve:

$$G_n^n A_n^{(2^{k+1})-n} \leqq A_n^{(2^{k+1})},$$

ahonnan

$$G_n^n \leqq \frac{A_n^{(2^k+1)}}{A_n^{2^{k+1}-n}} = A_n^n,$$

ez pedig éppen azt jelenti, hogy

$$G_n \leqq A_n,$$

amit bizonyítani akartunk.

d) A $G_n = A_n$ egyenlőség nyilvánvalóan teljesül, ha

$$a = a_1 = a_2 = \ldots = a_n,$$

hiszen ekkor

$$G_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a^n} = a,$$

illetve

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{na}{n} = a.$$

A tételben kimondott állítás igazolásához elegendő már csak azt belátni, hogy ha legalább egy elem eltér a többi közül valamelyiktől, akkor $G_n < A_n$. Feltehetjük, hogy ilyen elempár például az a_1 és a_2 számok. Indirekt utat követve tegyük fel, hogy $a_1 \neq a_2$, mégis $G_n = A_n$.

Az

$$\sqrt[n]{(a_1 a_2) a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

egyenlőtlenség átírható a következő alakra:

$$\sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2}^2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} = \frac{2\frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Felhasználva, hogy $a_1 \neq a_2$ esetén $\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}$:

$$G_n = \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2}^2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} < \sqrt[n]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} =$$

$$= \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqq \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} = A_n$$

bizonyított tételünk szerint.

Ellentmondásra jutottunk, tehát valóban $A_n = G_n$, akkor és csakis akkor, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Ezzel a IV. tételt igazoltuk.

3. definíció: *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok harmonikus közepén értjük és $H_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = H_n$-nel jelöljük a*

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

számot.

V. TÉTEL: *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok minimumát, illetve maximumát* min a_i-, *illetve* max a_i-*vel jelölve* $\min a_i \leqq H_n \leqq \max a_i$.

Bizonyítás: A

$$H_n = \frac{1}{\dfrac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}}$$

alakról azonnal leolvasható, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok harmonikus közepe az adott számok reciprokaiból képzett elemek aritmetikai közepének reciproka. Ezek alapján az $\frac{1}{a_i} = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jelölésekkel a

$$\min b_i = \min\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\max a_i}, \quad \max b_i = \frac{1}{\min a_i}$$

összefüggéseket használva az I. tétel szerint

$$\max b_i = \max\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) \geqq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{\max a_i} = \min b_i.$$

A megfelelő mennyiségek reciprokaira így:

$$\frac{1}{\max b_i} = \min a_i \leqq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = H_n \leqq \max a_i,$$

ezzel pedig tételünket igazoltuk.

VI. TÉTEL: *Az* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *tetszőleges pozitív számokra teljesül, hogy* $H_n \leqq G_n$. *Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a geometriai és algebrai középre vonatkozó, már bizonyított IV. tételt! A

$$H_n = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}{n}}$$

alakból

$$\frac{1}{H_n} = \frac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}{n}.$$

A IV. tétel szerint

$$\frac{1}{H_n} \geqq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot\ldots\cdot a_n}} = \frac{1}{G_n},$$

ahonnan valóban $G_n \geqq H_n$. A $G_n = H_n$-re vonatkozó feltétel szintén a IV. tétel azonnali következménye.

4. definíció: *Az* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *valós számok négyzetes (kvadratikus) közepének nevezzük és* Q_n $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = Q_n$*-nel jelöljük a*

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

számot.

VII. TÉTEL: *Ha* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *nemnegatív számok, akkor* $\min a_i \leqq Q_n \leqq \max a_i$.

Bizonyítás: $0 \leqq \min a_i \leqq a_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, $\max a_i \geqq a_k$ miatt $n(\min a_i)^2 \leqq a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \leqq n(\max a_i)^2$, ahonnan

$$\sqrt{\frac{n(\min a_i)^2}{n}} \leqq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \leqq \sqrt{\frac{n(\max a_i)^2}{n}},$$

azaz $\min a_i \leqq Q_n \leqq \max a_i$, ezzel állításunkat igazoltuk.

VIII. TÉTEL: *Tetszőleges valós* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *számokra fennáll, hogy* $A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq Q_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. *Egyenlőség csak akkor lép fel, ha* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n \geqq 0$.

Bizonyítás: A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

$$n = 2\text{-re: } \frac{a_1+a_2}{2} \leqq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}},$$

ez pedig ekvivalens a mindig igaz $0 \leqq (a_2-a_1)^2$ egyenlőtlenséggel (azonos átalakításokkal kapható).

Tegyük fel $n=k$-ra, hogy $A_k \leqq Q_k$ a tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számokra. $n=k+1$-re úgy igazolunk ekkor, hogy kiindulunk az $(a_{k+1}-a_i)^2 \geqq 0$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ azonos egyenlőtlenségek $2a_ia_{k+1} \leqq a_{k+1}^2 + a_i^2$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ alakjából.

Összegezve ezen egyenlőtlenségeket:

$$\sum_{i=1}^{k} 2a_ia_{k+1} \leqq \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}^2+a_i^2) = ka_{k+1}^2 + \sum_{i=1}^{k} a_i^2,$$

azaz

$$2a_{k+1}(a_1+a_2+\ldots a_k) \leqq ka_{k+1}^2+(a_1^2+a_2^2+\ldots a_k^2).$$

Adjuk mindkét oldalhoz $a_{k+1}^2+(a_1+\ldots+a_k)^2$ értékét:

$$a_{k+1}^2+2a_{k+1}(a_1+a_2+\ldots+a_k)+(a_1+\ldots+a_k)^2 =$$
$$= (a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1})^2 \leqq (k+1)a_{k+1}^2+(a_1^2+\ldots+a_k^2)+(a_1+\ldots+a_k)^2.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\right)^2 \leqq \frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2}{k},$$

azaz

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2 \leqq k(a_1^2+\ldots+a_k^2),$$

ennek alapján pedig

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1})^2 \leqq$$
$$\leqq (k+1)a_{k+1}^2+(a_1^2+\ldots+a_k^2)+(a_1+\ldots+a_k)^2 \leqq$$
$$\leqq (k+1)a_{k+1}^2+(k+1)\cdot(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2),$$

ahonnan

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{k+1})^2 \leqq (k+1)(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{k+1}^2).$$

A kapott egyenlőtlenségből pedig már azonnal következik a bizonyítandó egyenlőtlenség helyessége. Meg kell még mutatni, hogy egyenlőség csak az $a_1=a_2=\ldots=a_n$ esetben lehet.

Ha $a_1=a_2=\ldots=a_n=a\geqq 0$, akkor nyilvánvaló, hogy $A_n=Q_n$, hiszen $A_n=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\dfrac{na}{n}=a$ és $Q_n=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}=\sqrt{\dfrac{na^2}{n}}=$ $=a$. Ha viszont van az a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ számok között különböző, például a_1 és a_2 $(a_1\neq a_2)$, akkor az $\dfrac{a_1+a_2}{2}<\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2}{2}}$ egyenlőtlenség felhasználásával (az utóbbi egyenlőtlenség ekvivalens a $0<(a_2-a_1)^2$ egyenlőtlenséggel):

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}=\frac{2\dfrac{a_1+a_2}{2}+a_3+\ldots+a_n}{n}<$$

$$<\frac{\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2}{2}}+a_3+\ldots+a_n}{n}\leqq$$

$$\leqq\sqrt{\frac{\dfrac{a_1^2+a_2^2}{2}+\dfrac{a_1^2+a_2^2}{2}+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}}=Q_n,$$

tehát $A_n<Q_n$ adódik. Ezzel tételünket igazoltuk.

Eddig kimondott tételeinket összefoglalva és egybevetve megállapíthatjuk, hogy az aritmetikai közép, geometriai közép, harmonikus közép, négyzetes közép elnevezés indokolt, hiszen

$$\min a_i\leqq A_n,\ G_n,\ H_n,\ Q_n\leqq \max a_i,$$

továbbá igaz, hogy

$$\min a_i\leqq H_n\leqq G_n\leqq A_n\leqq Q_n\leqq \max a_i,\quad \text{ha}\quad a_k>0$$
$$(k=1,2,\ldots,n).$$

5. definíció: *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok k-adik hatványközepének nevezzük és $S_n^{(k)}=S_n^{(k)}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$-nel jelöljük az*

$$S_n^{(k)}=\left(\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}\right)^{1/k}$$

számot, ahol $k \neq 0$. *Megjegyezzük, hogy* $k=-1$ *esetén* $S_n^{(-1)}=H_n$, $k=1$ *esetén* $S_n^{(1)}=A_n$ *és* $k=2$ *esetén* $S_n^{(2)}=Q_n$. *A bizonyított* $H_n \leqq A_n \leqq Q_n$ *egyenlőtlenséglánc ezek alapján így is írható:*

$$S_n^{(-1)} \leqq S_n^{(1)} \leqq S_n^{(2)}.$$

IX. TÉTEL: *Ha* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *tetszőleges pozitív számok és* $k \neq 0$, *akkor* $\min a_i \leqq S_n^{(k)} \leqq \max a_i$.

Bizonyítás: Mivel $\min a_i \leqq a_j \leqq \max a_i$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, ezért $k>0$ esetén

$$n(\min a_i)^k \leqq a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k \leqq n(\max a_i)^k,$$

ahonnan

$$\left(\frac{n(\min a_i)^k}{n}\right)^{1/k} \leqq \left(\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}\right)^{1/k} = S_n^{(k)} \leqq \left(\frac{n(\max a_1)^k}{n}\right)^{1/k},$$

azaz

$$\min a_i \leqq S_n^{(k)} \leqq \max a_i.$$

Hasonlóan; ha $k<0$, akkor $\min a_i \leqq a_j \leqq \max a_i$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ esetén $(\min a_i)^k \geqq a_j^k \geqq (\max a_i)^k$ és ezért

$$\frac{n(\min a_i)^k}{n} \geqq \frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n} \geqq \frac{n(\max a_i)^k}{n},$$

ahonnan $\frac{1}{k}$-adik hatványra emelve a bizonyítandó $\min a_i \leqq S_n^{(k)} \leqq \max a_i$ egyenlőtlenség adódik.

X. TÉTEL: *Ha k pozitív egész, akkor az* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *pozitív számokra teljesül, hogy* $A_n \leqq S_n^{(k)}$. *Egyenlőség csak akkor van, ha* $k=1$, *vagy* $k \neq 1$ *esetén* $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Bizonyítás: $k=1$-re és $k=2$-re már láttuk, hogy tetszőleges n esetén helyes az egyenlőtlenség. $n=1$-re a tétel nyilvánvalóan igaz.

Teljes indukcióval fogunk igazolni, a IV. tétel bizonyításához hasonló gondolatmenet alapján.

a) Először azt látjuk be, hogy $n=2$-re tetszőleges $k>1$ egészre helyes a tétel állítása. Ha $n=2$, akkor az

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^k \leqq \frac{a_1^k+a_2^k}{2}$$

egyenlőtlenség teljesülése igazolandó. Az *a)* pontban foglaltak igazolását is teljes indukcióval végezzük: $k=2$-re az állítás helyes, mert az

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \leqq \frac{a_1^2+a_2^2}{2}$$

egyenlőtlenség ekvivalens a $0 \leqq (a_2-a_1)^2$ igaz egyenlőtlenséggel. Tegyük fel, hogy $k=t$-re

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^t \leqq \frac{a_1^t+a_2^t}{2}.$$

Ekkor

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^{t+1} = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^t \cdot \frac{a_1+a_2}{2} \leqq \frac{a_1^t+a_2^t}{2} \cdot \frac{a_1+a_2}{2}$$

az indukciós feltevés szerint. Ha sikerül kimutatni, hogy

$$\frac{a_1^t+a_2^t}{2} \cdot \frac{a_1+a_2}{2} \leqq \frac{a_1^{t+1}+a_2^{t+1}}{2},$$

akkor bizonyításunk *a)* részével készen vagyunk. Utóbbi egyenlőtlenségünk rendezéssel az

$$a_1^{t+1}+a_2^{t+1}+a_1^t \cdot a_2+a_1 \cdot a_2^t \leqq 2a_1^{t+1}+2a_2^{t+1},$$

illetve

$$a_1^t a_2+a_1 a_2^t \leqq a_1^{t+1}+a_2^{t+1}$$

alakra hozható. Ujabb azonos átalakításokkal pedig a

$$0 \leqq a_1^{t+1}-a_1^t a_2+a_2^{t+1}-a_1 a_2^{t+1} =$$

$$= a_1^t(a_1-a_2)+a_2^t(a_2-a_1) = (a_1-a_2)(a_1^t-a_2^t)$$

alakról már leolvasható állításunk helyessége, hiszen $t>1$ esetén $a_1<a_2$-re $a_1^t<a_2^t$ és $a_1>a_2$-re $a_1^t>a_2^t$ $(a_1>0, a_2>0)$.

b) Most belátjuk, hogy amennyiben tetszőleges $n>1$-re

$$A_n \leqq S_n^{(k)}, \quad \text{akkor} \quad A_{2n} \leqq S_{2n}^{(k)}.$$

Az *a)* pontban bizonyítottak szerint

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{2n}\right)^k=$$

$$=\left(\frac{\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}+\dfrac{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n}}{2}\right)^k\leqq$$

$$\leqq\frac{\left(\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^k+\left(\dfrac{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n}\right)^k}{2}.$$

Az indukciós feltevés alapján pedig

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{2n}\right)^k\leqq$$

$$\leqq\frac{\left(\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^k+\left(\dfrac{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n}\right)^k}{2}\leqq$$

$$\leqq\frac{\dfrac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}+\dfrac{a_{n+1}^k+\ldots+a_{2n}^k}{n}}{2}=$$

$$=\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_{2n}^k}{2n},$$

azaz

$$(A_{2n})^k\leqq(S_{2n}^{(k)})^k,$$

ahonnan

$$A_{2n}\leqq S_{2n}^{(k)}.$$

c) Ha tehát n 2 hatvány, akkor készen vagyunk, hiszen $n=2$-re és n-ről $2n$-re igazoltuk a tétel állítását. Ha $n\neq 2$ hatvány, akkor található olyan m pozitív egész, amelyre: $2^{m-1}<n<2^m$. A *b)* ponttal bezáróan igazoltuk, hogy $A_{2^m}\leqq S_{2^m}^{(k)}$. Legyen $A_{2^m}=A_{2^m}(a_1, a_2, \ldots, a_{2^m})$, ahol $a_j=A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ minden $n<j\leqq 2^m$-re. Ekkor

$$A_{2^m}=\frac{(a_1+\ldots+a_n)+(2^m-n)A_n}{2^m}=\frac{nA_n+(2^m-n)A_n}{2^m}=A_n,$$

továbbá

$$A_n = A_{2^m} \leqq S_{2^m}^{(k)} = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + \ldots + a_n^k + (2^m - n) \cdot (A_n)^k}{2^m}},$$

k-adik hatványra emelve, 2^m-mel szorozva és rendezve az egyenlőtlenséget az

$$(A_n)^k \cdot 2^m - (2^m - n) \cdot (A_n)^k \leqq a_1^k + \ldots + a_n^k$$

alakhoz jutunk, ahonnan

$$(A_n)^k \leqq \frac{a_1^k + \ldots + a_n^k}{n},$$

azaz $A_n \leqq S_n^{(k)}$. Ezzel tételünket lényegében igazoltuk. Meg kellene még vizsgálni az $A_n = S_n^{(k)}$ egyenlőség feltételét, az $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ $(n \neq 1,\ k \neq 1)$ feltétel szükséges és elégséges voltát. A bizonyítást a VIII. tétel bizonyításakor alkalmazott gondolatmenet alapján végezhetnénk el, felhasználva, hogy $a_1 \neq a_2$ esetén $\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^k < \frac{a_1^k + a_2^k}{2}$.

XI. TÉTEL: *Ha k egész szám és $k < 0$, akkor az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számokra $S_n^{(k)} \leqq G_n$, egyenlőség pedig csak az $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ esetben van a $k = -1$ esetet leszámítva.*

Bizonyítás: A bizonyítás helyessége az alábbi átalakítások azonnali következménye: $k < 0$ esetén

$$S_n^{(k)} = S_n^{(-|k|)} = \left(\frac{n}{a_1^{-|k|} + \ldots + a_n^{-|k|}}\right)^{1/|k|} = \left(\frac{n}{\frac{1}{a_1^{|k|}} + \ldots + \frac{1}{a_n^{|k|}}}\right)^{1/|k|} =$$

$$= \left(H_n(a_1^{|k|}, \ldots, a_n^{|k|})\right)^{1/|k|} \leqq \left(G_n(a_1^{|k|}, \ldots, a_n^{|k|})\right)^{1/|k|} =$$

$$= \left(\sqrt[n]{a_1^{|k|} a_2^{|k|} \cdot \ldots \cdot a_n^{|k|}}\right)^{1/|k|} = G_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = G_n,$$

ahol az egyenlőtlenség a VI. tétel felhasználásának eredménye is. A hatványközépről eddig a következőket láttuk be: $S_n^{(-1)} = H_n$, $S_n^{(1)} = A_n$, $S_n^{(2)} = Q_n$, továbbá ha k egész és $k \geqq 1$, akkor $A_n \leqq S_n^{(k)}$, illetve $k < 0$ esetén $S_n^{(k)} \leqq G_n$.

XII. TÉTEL *(Cauchy—Bunyakovszkij-egyenlőtlenség): Ha a_i és b_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ tetszőleges valós számok, akkor*

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2),$$

vagy röviden:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leqq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)\cdot(\sum_{i=1}^{n} b_i^2).$$

Egyenlőség pedig csak akkor áll fenn, ha az a_i és b_i számok arányosak, azaz van olyan $\lambda \neq 0$ szám, melyre $a_i=\lambda b_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Bizonyítás: Legyen $A=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$ és $B=\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$, valamint $c_i=\dfrac{a_i}{A}$, $d_i=\dfrac{b_i}{B}$, ahol $A\neq 0$, $B\neq 0$, $A=0$, illetve $B=0$ esetén állításunk helyessége nyilvánvaló. $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Jelöléseinkkel

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2 = \frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{A^2} = 1$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \frac{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}{B^2} = 1.$$

Az $i=1, 2, \ldots, n$-re teljesülő $(c_i-d_i)^2 \geqq 0$ egyenlőtlenségek alapján

$$c_i d_i \leqq \frac{1}{2}c_i^2+\frac{1}{2}d_i^2 \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Ezen egyenlőtlenségeket összegezve a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i d_i \leqq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}c_i^2+\frac{1}{2}d_i^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \frac{1}{2}\frac{A^2}{A^2}+\frac{1}{2}\frac{B^2}{B^2} = 1$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

A

$$c_i=\frac{a_i}{A},\quad d_i=\frac{b_i}{B},\quad A=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2},\quad B=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

helyettesítéseket elvégezve a bizonyítandó egyenlőtlenséggel ekvivalens

$$\sum_{i=1}^{n} c_i d_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{AB} \leqq 1,$$

azaz a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqq AB = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Egyenlőség nyilvánvalóan csak akkor lehet, ha $c_i = d_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$-re, azaz $\frac{a_i}{A} = \frac{b_i}{B}$, tehát $a_i = \frac{A}{B} b_i$ minden lehetséges i értékre. Ezzel tételünket igazoltuk a $B = 0$ triviális eset kivételével.

A Cauchy—Bunyakovszkij-egyenlőtlenség felhasználásával könnyűszerrel kaphatjuk egy új bizonyítását a számtani- és kvadratikus középre vonatkozó tételnek.

Valóban; $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$ választással a Cauchy—Bunyakovszkij-egyenlőtlenség:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot n,$$

ahonnan

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n^2} \leqq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n},$$

tehát $A_n^2 \leqq Q_n^2$, ami állításunk igazolja.

XIII. TÉTEL *(Bernoulli-egyenlőtlenség): Bármely $h > 0$ valós számra és $n > 1$ racionális számra teljesül, hogy*

$$(1 + h)^n > 1 + nh.$$

Bizonyítás: Ha n pozitív racionális szám, akkor felírható $n = \frac{p}{q}$ alakban, ahol $p > 0$, $q > 0$, $p > q$ és $(p, q) = 1$. Így bizonyítandó az

$$(1 + h)^{p/q} > 1 + \frac{p}{q} h$$

egyenlőtlenség. Alkalmazzuk az aritmetikai és geometriai középre vonatkozó IV. tételt:

$$\sqrt[p]{\underbrace{\left(1+\frac{p}{q}h\right)\cdot\left(1+\frac{p}{q}h\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p}{q}h\right)}_{q\text{-szor}}\cdot\underbrace{(1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1)}_{(p-q)\text{-szor}}} <$$

$$< \frac{q\left(1+\frac{p}{q}h\right)+(p-q)\cdot 1}{p} = \frac{q+ph+p-q}{p} = 1+h,$$

tehát

$$(1+nh)^{q/p} = (1+nh)^{1/n} < 1+h.$$

A kapott egyenlőtlenséget n-edik hatványra emelve a bizonyítandó $1+nh<(1+h)^n$ egyenlőtlenséghez jutunk.

XIV. TÉTEL *(Hölder-egyenlőtlenség): Ha p és q olyan pozitív racionális számok, melyek teljesítik az $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ feltételt, akkor tetszőleges pozitív $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számokra fennáll az*

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \leqq$$
$$\leqq (x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p)^{1/p}\cdot(y_1^q+y_2^q+\ldots+y_n^q)^{1/q},$$

vagy röviden az

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}$$

egyenlőtlenség és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}.$$

Bizonyítás: Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = x, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^q = y, \quad p=\frac{k}{m}>1, \text{ ahol } k>m \text{ és } (k,m)=1.$$

Ekkor

$$\frac{1}{p}=\frac{m}{k} \text{ és } \frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p}=\frac{k-m}{k}.$$

Új jelöléseinkkel a bizonyítandó egyenlőtlenség így írható fel:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq x^{1/p} y^{1/q},$$

vagy végigosztva a két oldalt $x^{1/p}y^{1/q}$-nal:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{x^{1/p} y^{1/q}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^p}{x}\right)^{1/p} \cdot \left(\frac{y_i^q}{y}\right)^{1/q} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^p}{x}\right)^{m/k} \cdot \left(\frac{y_i^q}{y}\right)^{(k-m)/k} \leqq 1.$$

A Hölder-egyenlőtlenségnek ezt az alakját fogjuk igazolni.

A $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^p}{x}\right)^{m/k} \cdot \left(\frac{y_i^q}{y}\right)^{(k-m)/k}$ összeg bármely tagját felírhatjuk az alábbi módon:

$$\left(\frac{x_i^p}{x}\right)^{m/k} \cdot \left(\frac{y_i^q}{y}\right)^{(k-m)/k} =$$

$$= \Bigg[\underbrace{\left(\frac{x_i^p}{x}\right)\left(\frac{x_i^p}{x}\right)\cdot \ldots \cdot\left(\frac{x_i^p}{x}\right)}_{m\text{-szer}}\underbrace{\left(\frac{y_i^q}{y}\right)\left(\frac{y_i^q}{y}\right)\cdot \ldots \cdot\left(\frac{y_i^q}{y}\right)}_{(k-m)\text{-szer}}\Bigg]^{1/k}.$$

A felbontás nem más, mint k darab szám geometriai közepe. Alkalmazzuk a számtani és mértani középarányosra vonatkozó IV. tételt:

$$\left(\frac{x_i^p}{x}\right)^{m/k} \cdot \left(\frac{y_i^q}{y}\right)^{(k-m)/k} \leqq \frac{m\left(\frac{x_i^p}{x}\right) + (k-m)\cdot\left(\frac{y_i^q}{y}\right)}{k} = \frac{1}{p}\cdot\frac{x_i^p}{x} + \frac{1}{q}\cdot\frac{y_i^q}{y},$$

minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re. Adjuk össze az n számú egyenlőtlenséget:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^p}{x}\right)^{m/k} \cdot \left(\frac{y_i^q}{y}\right)^{(k-m)/k} \leqq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p}\cdot\frac{x_i^p}{x} + \frac{1}{q}\cdot\frac{y_i^q}{y}\right) =$$

$$= \frac{1}{px}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{qy}\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i^q = \frac{1}{px}x + \frac{1}{qy}y = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^p}{x}\right)^{m/k} \left(\frac{y_i^q}{y}\right)^{(k-m)/k} \leqq 1,$$

és éppen ezt akartuk igazolni.

A bizonyítás menetéből (a IV. tétel alkalmazása) azonnal adódik, hogy egyenlőség csak az $\frac{x_i^p}{x} = \frac{y_i^q}{y}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ esetben áll fenn, azaz $\frac{x}{y} = \frac{x_1^p}{y_1^q} = \ldots = \frac{x_n^p}{y_n^q}$, ahonnan egyszerűen következik, hogy

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}.$$

Ezzel tételünket igazoltuk. Megemlítjük, hogy a Hölder-egyenlőtlenség az $y_1=y_2=\ldots=y_n=1$, $p=q=2$ esetben

$$x_1+x_2+\ldots+x_n \leqq \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\cdot\sqrt{n}$$

alakú, ez pedig éppen a VIII. tétel $A_n \leqq Q_n$ állításával ekvivalens. Ha csak az $y_1=y_2=\ldots=y_n=1$ helyettesítést végezzük el, akkor a Hölder-egyenlőtlenség az

$$x_1+x_2+\ldots+x_n \leqq (x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p)^{1/p} n^{1/q}$$

alakot ölti, ahonnan

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \leqq \left(\frac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

Ez az egyenlőtlenség többet mutat, mint a X. tétel során bizonyított hatványközépre vonatkozó egyenlőtlenség, hiszen ott csak pozitív egész kitevőre igazoltunk, most pedig p tetszőleges 1-nél nagyobb racionális szám lehet.

Megemlítjük még, hogy $p=q=2$ esetén a Hölder-egyenlőtlenség a Cauchy—Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget szolgáltatja.

XV. TÉTEL *(Minkowski-egyenlőtlenség): Ha* $p>1$ *és racionális szám, továbbá* $x_{ij}>0$, *ahol* $i=1, 2, \ldots, k$, $j=1, 2, \ldots, n$, *akkor az* x_{ij} *valós számokra teljesül, hogy*

$$[(x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n})^p+(x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n})^p+$$
$$+\ldots+(x_{k1}+x_{k2}+\ldots+x_{kn})^p]^{1/p} \leqq (x_{11}^p+x_{21}^p+\ldots+x_{k1}^p)^{1/p}+$$
$$+(x_{12}^p+x_{22}^p+\ldots+x_{k2}^p)^{1/p}+\ldots+(x_{1n}^p+x_{2n}^p+\ldots+x_{kn}^p)^{1/p},$$

egyenlőség pedig csak az

$$\frac{a_{1m}}{a_{1t}} = \frac{a_{2m}}{a_{2t}} = \ldots = \frac{a_{km}}{a_{kt}} \quad (m, t = 1, 2, \ldots, n)$$

esetben lehetséges. Tételünk egyenlőtlensége rövidebben így írható fel:

$$\Big[\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\Big)^p\Big]^{1/p} \leqq \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{k} x_{ij}^p\Big)^{1/p}.$$

Bizonyítás: A Hölder-egyenlőtlenség szerint az $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{kj}$, illetve a tetszőleges pozitív $y_1, y_2, \ldots, y_k$ számokra $p > 1$ és $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ esetén teljesül, hogy

$$x_{1j}y_1+x_{2j}y_2+\ldots+x_{kj}y_k \leqq (x_{1j}^p+x_{2j}^p+\ldots+x_{kj}^p)^{1/p}\cdot(y_1^q+y_2^q+\ldots+y_k^q)^{1/q},$$

minden $j=1, 2, \ldots, n$-re. $j=1, 2, \ldots, n$ esetén felírva az egyenlőtlenségeket és a megfelelő oldalakat összeadva, valamint az $y_1, y_2, \ldots, y_k$ számokat kiemelve a bal oldalon; azt kapjuk, hogy

$$\begin{gathered} y_1(x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n})+y_2(x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n})+ \\ +\ldots+y_k(x_{k1}+x_{k2}+\ldots x_{kn}) \leqq (y_1^q+y_2^q+\ldots+y_k^q)^{1/q}\cdot \\ \cdot[(x_{11}^p+x_{21}^p+\ldots+x_{k1}^p)^{1/p}+(x_{12}^p+x_{22}^p+\ldots+x_{k2}^p)^{1/p}+ \\ +\ldots+(x_{1n}^p+x_{2n}^p+\ldots+x_{kn}^p)^{1/p}]. \end{gathered}$$

y_i-ről ($i=1, 2, \ldots, n$) idáig csak annyit tettünk fel, hogy $y_i>0$. Legyen a továbbiakban $y_i = (x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in})^{p-1}$, ekkor $\frac{1}{q} = 1-\frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$, $q = \frac{p}{p-1}$ miatt $y_i^q = (x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in})^p$, $i=1, 2, \ldots, n$).
Utolsó egyenlőtlenségünk a bevezetett jelölésekkel így írható:

$$\begin{gathered} [(x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n})^p+(x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n})^p+ \\ +\ldots+(x_{k1}+x_{k2}+\ldots+x_{kn})^p] \leqq \\ \leqq \Big[\Big(\sum_{j=1}^{n} x_{1j}\Big)^p+\Big(\sum_{j=1}^{n} x_{2j}\Big)^p+\ldots+\Big(\sum_{j=1}^{n} x_{kj}\Big)^p\Big]^{(p-1)/p}\cdot \\ \cdot[(x_{11}^p+x_{21}^p+\ldots+x_{k1}^p)^{1/p}+(x_{12}^p+x_{22}^p+\ldots+x_{k2}^p)^{1/p}+ \\ +\ldots+(x_{1n}^p+x_{2n}^p+\ldots+x_{kn}^p)^{1/p}. \end{gathered}$$