Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
8. osztály
I. forduló
MEGOLDÁSOK

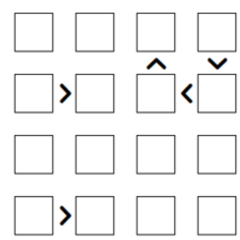
1. feladat: A táblára kezdetben az 1, 2, 3, 4, 5 számokat írjuk. Egy-egy lépésben letörlünk két számot, és helyettük a (pozitív vagy nulla) különbségüket írjuk vissza. Négy lépés múlva egyetlen szám marad a táblán. Mennyi lehet ennek a számnak a maximuma és minimuma? *(6 pont)*

1. feladat megoldás: A páratlan számok száma vagy nem változik, vagy 2-vel csökken; tehát a páratlan számok számának a paritása állandó. *(2 pont)*
Kezdetben 3 páratlan szám van, így az utolsónak maradt szám is páratlan. *(2 pont)*
A maximum 5, ez elérhető pl. a következő műveletekkel: $\underline{12}345 \longrightarrow 1\underline{34}5 \longrightarrow \underline{11}5 \longrightarrow \underline{05} \longrightarrow 5$. *(1 pont)*

A minimum 1, ez elérhető pl. a következő műveletekkel: $123\underline{45} \longrightarrow 1\underline{23}1 \longrightarrow \underline{11}1 \longrightarrow \underline{01} \longrightarrow 1$. *(1 pont)*

Ha csak konstrukciókat ad, de indoklást nem, akkor legfeljebb 2 *pont adható.*

2. feladat: Az ábrán látható 4×4-es táblázat mezőibe úgy kell beírni az $1, 2, 3, 4$ számokat, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy legyen mindegyikből, és a kisebb-nagyobb relációs jelek is teljesüljenek.



(6 pont)

2. feladat megoldás: $(1, 2)$ jelenti pl. a (balról) 1. oszlop (alulról) 2. mezőjébe (sorába) írt számot. A jobb felső 4 cella a relációs jelek miatt egyértelműen kitölthető, ezután a 3. sor első két cellája is egyértelmű.

		1	**4**
4	**1**	**2**	**3**

(2 pont)

Az első sor relációs jele miatt $(2, 1)$ nem lehet 4, így $(3, 1) = (2, 2) = 4$ a két további 4-es helyzete.

		1	4
4	1	2	3
	4		
		4	

(2 pont)

$(2, 1)$ nem lehet 3 (mert $(1, 1)$ nem lenne kitölthető), így $(1, 1) = 3, (2, 1) = 2, (4, 1) = 1$.

		1	4
4	1	2	3
	4		
3	**2**	4	**1**

(1 pont)

Ezután a kitöltés befejezhető:

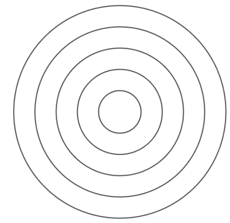
2	**3**	1	4
4	1	2	3
1	4	**3**	**2**
3	2	4	1

(1 pont)

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Kocsis Szilveszter, Orosz Gyula, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza

Helyes kitöltés és indoklás nélkül, hogy más egyéb kitöltés nem lehetséges: 5 pont.

3. feladat: Egy konferencia 300 résztvevője kör alakú kitűzőt kap, amely koncentrikus körgyűrűkből áll (ábra). Az 5 sáv mindegyike piros, sárga, kék vagy zöld színnel festhető ki, de a szomszédos sávok színe nem egyezhet meg. Jut-e minden résztvevőnek különböző színezésű kitűző?



(6 pont)

3. feladat megoldás: A lehetséges színezések száma $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$. *(2 pont)*
Ugyanis pl. belülről kifelé haladva az első sáv (a kitűző közepe) 4-féle színű lehet, a következő sávok pedig 3-félék lehetnek (az előző sávtól különbözők). *(2 pont)*
$324 > 300$, *(1 pont)*
tehát jut minden résztvevőnek különböző kitűző. *(1 pont)*

4. feladat: Az a, b, c, d, e és f számok különböző tízes számrendszerbeli számjegyeket jelölnek. Mennyi lehet f értéke, ha

$$a + b + c = 8;$$

$$c + d + e = 22;$$

$$e + f = 16?$$

(7 pont)

4. feladat megoldás: Az egyenleteket $(1), (2), (3)$ számokkal jelöljük.
(3)-ban a két számjegy 7 és 9 lehet. *(1 pont)*

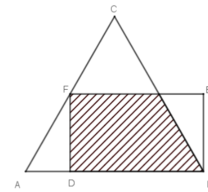
1. eset: Ha $e = 7$ és $f = 9$.
Ekkor (2)-ből $c + d = 15$, viszont akár $6 + 9$, akár $7 + 8$-ként jön létre az összeg, valamelyik számjegy már e vagy f által már használva van. *(1 pont)*
Így ekkor nincs megoldás. *(1 pont)*

2. eset: Ha $e = 9$ és $f = 7$. Ekkor (2)-ből $c + d = 13$,
a két számjegy lehetséges értékei $4, 9$; $5, 8$ vagy $6, 7$. *(2 pont)*
A 9 és a 7 számjegyek már $foglaltak$, így c és d lehetséges értékei $5, 8$. (1)-ből adódik, hogy például $a = 1$ és $b = 2$ (vagy fordítva), $c = 5$ és $d = 8$ alkalmas konstrukciót adnak. *(1 pont)*
Így adódik az $f = 7$ egyedüli megoldás. *(1 pont)*

Ha talál egy helyes megoldást és látszik, hogy az tényleg megoldja az összes egyenletet, de nincs indoklás, hogy más megoldás nem lehet, akkor kapjon 4 *pontot. Ha megfelelő a levezetése és kijön az* $f = 7$*, de nem nézi meg, hogy tényleg létezik-e hozzá konstrukció akkor* 6 *pontot kapjon. Minden egyéb helyes levezetésért maximális (7 pontot) adjunk.*

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Kocsis Szilveszter, Orosz Gyula, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza

5. feladat: Az ABC szabályos háromszög és a $DBEF$ téglalap az ábrán látható módon helyezkednek el. A D csúcs illeszkedik az AB szakaszra, F pont pedig a CA oldal felezőpontja. Hány százaléka a satírozott rész területe a téglalap területének?



(7 pont)

5. feladat megoldás: Az ABC szabályos háromszög és a $DBEF$ téglalap közös részét osszuk fel egybevágó félszabályos háromszögekre az ábra szerint. *(3 pont)*
A téglalap 6 ilyen kisebb háromszögből áll, a satírozott rész 5-ből. *(2 pont)*
A kérdezett területarány $\frac{5}{6}$, azaz kb. 83%. *(2 pont)*