Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
8. osztály
I. forduló
MEGOLDÁSOK

1. feladat: Egy nyolcjegyű szám számjegyeinek szorzata 120. Adjuk meg mindazokat a számjegyeket, amelyek biztosan szerepelnek ebben a számban?

(8 pont)

1. feladat megoldás: A 120 prímtényezős felbontása $2^3 \cdot 3 \cdot 5$. *(1 pont)*

Ezek alapján azok a jegyek, amik előfordulhatnak a számban: $1, 2, 3, 4, 5, 6$ és a 8. 7-tel és 9-cel nem osztható a 120. *(1 pont)*

A 0 nem szerepelhet a jegyek között, mert akkor a szorzat is 0 lenne. *(1 pont)*

Az 1 biztosan szerepel benne, hiszen ha a 120-at felbontjuk $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$-re, akkor a szorzat nem bontható egynél nagyobb egészek szorzatatira, viszont ez csak 5 számjegy. Hogy ne változzon a szorzat csak 1-es jegyeket használhatunk. *(2 pont)*

Az 5 biztosan szerepel benne, hiszen a számjegyek szorzata öttel osztható, de nincs más öttel osztható számjegy, ami nem a 0. *(2 pont)*

A többi jegy nem feltétlenül fog benne szerepelni, pl.: $51831111; 51641111$. *(1 pont)*

2. feladat: A gyerekek az udvaron fociztak és egyikük betörte az ablakot a labdával. A tanító néni magukhoz hívatta a gyerekeket és külön-külön megkérte őket, hogy mondjanak két különböző gyereket, aki NEM volt a tettes. A tanító néni tudta, hogy ez alapján pontosan ki tudja deríteni, hogy ki rúgta be az ablakot. Hányan focizhattak a gyerekek, ha mindenki igazat mondott és mindenki tudott mondani önmagán kívül két nevet, aki ártatlan volt.

(8 pont)

2. feladat megoldás: Legalább négyen voltak, mert ha négynél kevesebben lettek volna, egy ártatlan nem tudott volna önmagán kívül még két ártatlanra rámutatni. *(2 pont)*

Ha négynél többen lettek volna, akkor a tanító néni nem tudja biztosan kideríteni ez alapján, hogy ki volt a tettes. Példaként legyenek A, B és C ártatlanok, $D, E, \ldots$ közül pedig egyvalaki a tettes. Ha minden gyerek A, B és C közül választ kettőt, hogy ők az ártatlanok, akkor a $D, E, \ldots$ gyerek a tanító néni szemében megkülönböztethetetlen. *(3 pont)*

Ha négyen vannak, akkor viszont egyértelműen megmondható, hogy ki volt a tettes. Legyenek A, B és C ártatlanok, D a tettes. Ekkor A, B és C egymást tudják csak igazolni, vagyis mindegyikükről fogja mondani valaki, hogy ártatlan, de D-ről senki. Így a tanító néni fogja tudni, hogy az a gyerek a tettes, akit egyedüliként senki nem jelölt meg ártatlanként. *(3 pont)*

3. feladat: Hány olyan 100-nál kisebb pozitív egész szám létezik, amelynek a kétszerese négyzetszám, háromszorosa pedig köbszám?

(8 pont)

3. feladat megoldás: Ahhoz, hogy egy szám kétszerese négyzetszám legyen, az eredeti szám prímtényezős felbontásában páratlan sok 2-es prímtényező kell, hogy legyen, vagyis a 2 páratlan kitevővel kell, hogy szerepeljen. *(1 pont)*

Továbbá az eredeti számban minden más prímtényezőből páros sok kell, vagyis minden más prímtényező páros hatványon kell, hogy szerepeljen. *(1 pont)*

Ahhoz, hogy egy szám háromszorosa köbszám legyen, az eredeti szám prímtényezős felbontásában a hármasok száma 3-mal osztva 2 maradékot kell, hogy adjon, vagyis a 3 kitevője $3k + 2$ alakú. *(1 pont)*

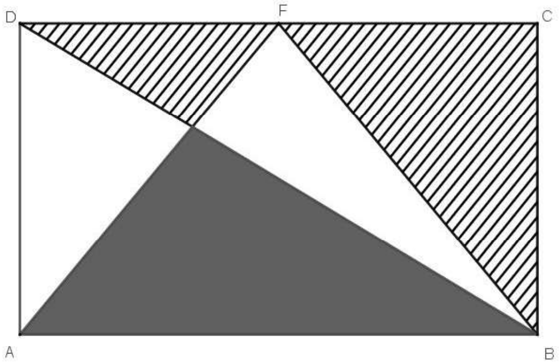
Továbbá az eredeti számban minden más prímtényező 3-mal osztható kell, hogy legyen. *(1 pont)*

Tehát a keresett számban a 2 prímtényező kitevője páratlan kell, hogy legyen és 3-mal osztható, a 3 kitevője pedig páros kell, hogy legyen, és 3-mal osztva kettő maradékot adó. *(2 pont)*

A legkisebb ilyen szám a $2^3 \cdot 3^2 = 72$. *(1 pont)*

Akár a 2-es, akár a 3-as prímtényező kitevőjét növeljük, a 72 már több, mint kétszeresére nő, vagyis nagyobb lesz, mint 100, ezért más jó megoldás nincs. *(1 pont)*

4. feladat: $ABCD$ téglalap CD oldalának felezőpontja F. Az ábrán látható vonalkázott háromszögek összterülete 1 egység. Mekkora a szürkével jelölt háromszög területe?



(8 pont)

4. feladat megoldás: A vonalkázott háromszögekhez hozzávéve azt a fehér háromszöget, melynek egyik oldala BF, éppen a BDC derékszögű háromszöget, a téglalap felét kapjuk, tehát a két vonalkázott háromszög és a BF oldalú fehér háromszög területösszege éppen a téglalap területének a fele. *(2 pont)*

A szürkével jelölt háromszöghoz hozzávéve a BF oldalú fehér háromszöget megkapjuk az ABF háromszöget. Ennek a területe szintén a téglalap fele, mert egyik oldala a téglalap egyik oldala, magassága pedig a téglalap másik oldala, a háromszög területe pedig a háromszög területképletéből következően $T = \frac{AB \cdot BC}{2}$. *(2 pont)*

Mivel a BDC és az ABF háromszög területe megegyezik, ezért ha elhagyjuk belőlük ugyanazt a fehér, BF oldalú háromszöget, a maradékok területe is meg kell, hogy egyezzen. Ez az egyik esetben éppen a vonalkázott háromszögek területeinek összege, ami 1, a másik esetben pedig a kérdéses szükrével jelölt háromszög területe. *(3 pont)*

Tehát a szürkével jelölt háromszög területe is 1 területegység. *(1 pont)*

5. feladat: Gondoltam egy háromjegyű számra, ami három különböző jegyből áll és ez a három számjegy az $1, 2$ és a 3. Ha tippelsz egy háromjegyű számot, megmondom, hogy hány szám áll az általad mondott és az általam gondolt közül a megfelelő helyiértéken. Legkevesebb hány próbálkozással tudsz kitalálni biztosan legalább egy jegyet?

(8 pont)

5. feladat megoldás: Két próbálkozás már elég. Első kérdésként megkérdezem az 123-at, utána pedig az 132-t. *(2 pont)*

Ezzel a konstrukcióval eltalálunk legalább egy jegyet, hiszen a kettes és a hármas jegyek közül nem lehet mindkettő az első helyiértéken, vagyis legalább az egyiknek a második vagy harmadik helyiértéken kell lennie. Mivel mindkettőt kipróbáltuk, ezért vagy a kettes, vagy a hármas a megfelelő helyen lesz. *(3 pont)*

Egy próbálkozás nem elég, hiszen ha minden helyiértéket eltolunk egyel, akkor egyetlen jegyet sem fogunk eltalálni. *(3 pont)*

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza