# Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
## 8. osztály
## II. forduló
## MEGOLDÁSOK

**1. feladat:** Degesz király kincstárában 40 aranyláda és 40 ezüstláda van. A király a kincseit az egyik aranyládában tartja, de elfelejtette, hogy melyikbe tette. A többi láda a ládákhoz tartozó kulcsok őrzésére szolgál, minden ládában egy másik láda kulcsa található (egy ládának csak egy kulcsa van). Az aranyládákat aranykulcs, az ezüstládákat ezüstkulcs nyitja, de minden kulcs csak egy ládát nyit ki. (Bármilyen ládában lehet ezüst- vagy aranykulcs, és a kincsesládában természetesen nincs kulcs.) Az egyfajta fémből készült ládák teljesen egyformák, és nem lehet ránézésre megállapítani, hogy melyik kulcs melyik ládát nyitja, csak úgy dönthető el ez a kérdés, ha a kulcsokat belepróbáljuk a zárakba. A király kezében egy aranykulccsal bement a kincstárba, és sorban kinyitogatta a ládákat úgy, hogy a végén sikerült megtudnia, hogy a kincset melyik ládába tette. Eközben összesen 30 aranyládát és 20 ezüstládát nyitott ki. Maximálisan hány próbálkozásból sikerült megtalálnia a kincset?

*(6 pont)*

**1. feladat megoldás:** Mivel 10 aranyláda kinyitatlanul maradt, ezért csak abban az esetben tudhatta meg, hogy melyikben van a kincs, ha az az utolsó kinyitott aranyládában volt. *(1 pont)*

Az aranyládák kinyitása során előfordulhatott, hogy minden egyes aranykulccsal az összes még zárt aranyládát végigpróbálta, és csak az utolsónak a zárjába illett az éppen a kezében levő kulcs; ugyanígy az ezüstládákkal is. *(2 pont)*

A 30 aranyláda kinyitására tett próbálkozások száma $40 + 39 + 38 + .... + 11 = 765$, a 20 ezüstláda kinyitására pedig $40 + 39 + 38 + .... + 21 = 610$ lehet. *(2 pont)*

Tehát maximálisan 1375 próbálkozással találta meg a kincsesládát. *(1 pont)*

**2. feladat:** A matrjoska baba készlet különböző méretű, egymásba helyezhető babákból áll a legnagyobbtól a legkisebbig. (Belül üregesek, a felénél félbe kinyithatóak, kivéve a legkisebb, így egy kisebb méretű belehelyezhető. Megfelelő sorrendben egymásba téve a végén egy babát kapunk.)
A képen egy 8 darabos matrjoska baba készlet látható. A legnagyobbal kezdve belehelyezünk néhányat úgy, hogy minden belehelyezett babánál ha lehet, akkor kell belehelyeznünk kisebbet. Hányféle ilyen összeállítás lehetséges?

*(6 pont)*

**2. feladat 1. megoldás:** Ha a legnagyobb babába a legkisebbet tesszük, az 1 lehetőség. Ha a legnagyobb babába a második legkisebbet tesszük, akkor abba még lehet a legkisebbet tenni, de mást nem, azaz ez is 1 lehetőség.

*(1 pont)*

Ha a legnagyobb babába a harmadik legkisebbet tesszük, akkor befejezhetjük a belepakolást a második legkisebbel (1 lehetőség), vagy a legkisebbel (szintén 1 lehetőség), azaz ennél $1 + 1 = 2$ lehetőség van.

*(2 pont)*

Minden továbbinál az előző lehetőségek összege adódik.

*(2 pont)*

Így összesen $1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 64$ lehetőség van.

*(1 pont)*

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza

**2. feladat 2. megoldás:** A legnagyobb babával kezdjük, itt nem választhatunk, és a legkisebbet biztosan bele tudjuk helyezni bármelyikbe, tehát ennél sincs választási lehetőségünk.

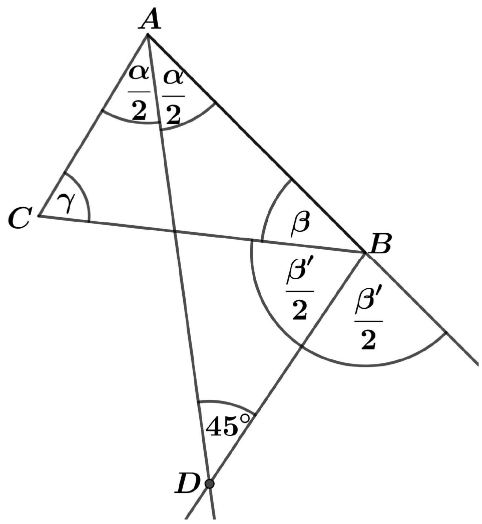
*(1 pont)*

Azonban a maradék hat babánál dönthetünk, hogy belehelyezzük avagy nem. Tehát ezeknél $2*2*2*2*2*2=64$ választási lehetőségünk van.

*(5 pont)*

**3. feladat:** Egy háromszög egyik belső szögének szögfelezője egy másik szöghöz tartozó külső szög szögfelezőjével 45°-os szöget zár be. Hány fokos a háromszög harmadik szöge?

*(6 pont)*




**3. feladat megoldás:** Legyen a háromszög $A$ csúcsánál $\alpha$, a $B$ csúcsánál $\beta$, a $C$ csúcsánál $\gamma$ szög. Ekkor a $B$ csúcsnál lévő külső szög $\beta' = \alpha + \gamma$. Azaz a fele: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

*(2 pont)*

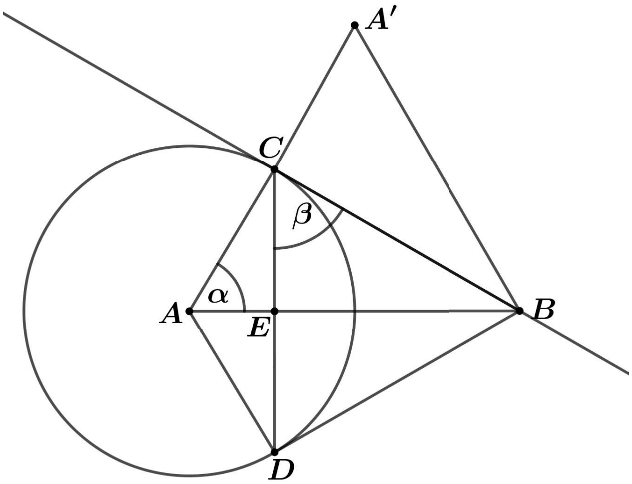
így az $ABD$ háromszög belső szögeinek összege:
$\frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\beta'}{2} + 45° = \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + 45° = 180°$

*(2 pont)*

Ezt összevetve az $ABC$ háromszög belső szögeinek összegével
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, adódik, hogy $\frac{\gamma}{2} = 45°$, tehát $\gamma = 90°$.

*(2 pont)*

**4. feladat:** Egy 3 cm sugarú körtől 3 cm-re lévő pontból érintőket húztunk a körhöz. Melyik a hosszabb: az érintőszakasz vagy a két érintési pontot egymással összekötő szakasz? *(6 pont)*




**4. feladat 1. megoldás:**

Legyen a kör középpontja $A$, a körtől 3 cm-re lévő pont $B$, a két érintési pont $C$, illetve $D$. Ekkor $AB$ szakasz 6 cm, $AC$ és $AD$ szakasz 3 cm hosszú.

Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, így $ABC$ háromszög derékszögű, ugyanígy az $ABD$ háromszög is.

Tükrözzük az $ABC$ háromszöget az érintő egyenesre. Az együttes alakzatként kapott $ABA'$ háromszög egyenlő oldalú, azaz szögei 60°-osak, tehát $\alpha = 60°$.

*(2 pont)*

Az $AEC$ háromszög szintén derékszögű háromszög ($CD$ merőleges $AB$-re). Így a $C$ csúcsnál 30° van, tehát $\beta = 60°$.

Hasonlóan $CDB$ szög is 60°, azaz a $CDB$ háromszög harmadik, $B$-nél levő szöge is 60°, tehát a háromszög szabályos, az oldalai egyenlőek.

*(3 pont)*

Tehát a kérdéses érintőszakasz, illetve a húr hossza egyenlő.

*(1 pont)*

**4. feladat 2. megoldás:** Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, így $ABC$ háromszög derékszögű, ugyanígy az $ABD$ háromszög is. Az $AB$ átfogó 6 cm, míg az $AC$ egyik befogó 3 cm, Pitagorasz tételt alkalmazva a másik befogó négyzete $6^2 - 3^2 = 27$, azaz az érintőszakasz hossza $\sqrt{27}$.

*(1 pont)*

Tükrözzük az $ABC$ háromszöget az érintő egyenesre. Az együttes alakzatként kapott $ABA'$ háromszög egyenlő oldalú, azaz szögei 60°-osak, tehát $\alpha = 60°$.

*(2 pont)*

Az $AEC$ háromszög szintén derékszögű háromszög ($CD$ merőleges $AB$-re), az $A$ csúcsnál 60°-os szöggel, ez szintén egy félszabályos háromszög (EC egyenesre tükrözve szabályos háromszöget kapunk), így $AE = 3 : 2 = 1,5$ cm.

*(1 pont)*

Az $AEC$ háromszögben a Pitagorasz tételt alkalmazva $CE$ szakasz : $\sqrt{3^2 - 1,5^2} = \sqrt{6,75}$

*(1 pont)*

Azaz a $CD$ húr hossza $2 * \sqrt{6,75} = \sqrt{4} * \sqrt{6,75} = \sqrt{4 * 6,75} = \sqrt{27}$, ami megegyezik a $CB$ érintési szakasz hosszával.

*(1 pont)*

**5. feladat:** Tibi és Vili számlétrát játszanak. A 0-tól kezdve felváltva mondanak az utoljára elhangzottnál legalább 1-gyel, legfeljebb 10-zel nagyobb egész számot. A játékot az nyeri, aki a 100-at kimondja. Abban azonban megegyeznek, hogy 5-tel egyikük sem növelhet. A játék megkezdése előtt külön-külön gondolkoztak, hogyan játszanak. Tibi arra jutott, hogyha ő kezdheti a játékot, azaz ő mondhatja az első 0-nál nagyobb számot, akkor biztosan megnyeri a játékot. Igaza van-e Tibinek, van-e ilyen nyerő stratégia, ha mindketten okosak, és nyerni szeretnének?

*(6 pont)*

**5. feladat megoldás:** Igaza van Tibinek.

*(1 pont)*

Gondolkozzunk visszafelé. Mindenképpen ki tudja mondani Tibi a 100-at, ha kimondja a 84-et. Ha erre Vili 90-nél kevesebbet mond, akkor Tibi 95-öt válaszol. Innen biztosan nyer Tibi. Ha 90-et vagy nagyobbat mond, $84 + 10 = 94$ a legtöbb, amit mondhat Vili, akkor Tibi kimondja a 100-at.

*(2 pont)*

Tehát Tibi 16-onként gondolkodik visszafele. Mivel a 100 16-os osztási maradéka 4, ezért a legkisebb ilyen pozitív számról indulva, azaz a 4-ről, mindenképpen Tibi fog nyerni ügyesen. (Visszaszámolva ugyanúgy megfelelő.)

*(2 pont)*

Azaz a nyerő mezők a 4-től kezdve a 11. vagy a 16. mező, az ellenfél válaszától függően. Ha tudjuk, akkor a 16.-ra pótoljuk, ha nem, akkor a 11.-re. Ez mindig elérhető, hiszen $1 + 10 = 11$-et mindenképpen tudunk lépni. Kivéve ha az ellenfél 6-tal növel, de akkor meg $6 + 10 = 16$-ot tudunk lépni.

*(1 pont)*

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza