Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
8. oszály
I. forduló
MEGOLDÁSOK

1. feladat: Mennyi lehet az a, b valós, 0-tól különböző számok esetén a következő kifejezés értéke?

$$\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} - \frac{|ab|}{ab}$$

(5 pont)

1. feladat megoldás: Vegyük észre, hogy a $\frac{|x|}{x}$ értéke csak 1 vagy -1 lehet attól függően, hogy x pozitív, vagy negatív. *(2 pont)* Ha a és b is pozitív, akkor az eredmény 1 *(1 pont)*, ha a és b közül az egyik pozitív, a másik negatív, az eredmény akkor is 1 *(1 pont)*, ha mindkettő negatív, akkor az eredmény -3. *(1 pont)*

2. feladat: Hány négyzetszám található az alábbi sorozatban?

$$2; 32; 332; 3332; \ldots$$

A számsorozat n-edik tagja $n-1$ db 3-as és 1 db 2-es számjegyből áll.
(5 pont)

2. feladat megoldás I: A sorozat minden tagjának 2 a hármas maradéka *(2 pont)* és egy négyzetszám hármas maradéka nem lehet 2 *(2 pont)*. Tehát a számsorozatban nincs négyzetszám. *(1 pont)*

2. feladat megoldás II: Négyzetszám nem végződhet kettőre.

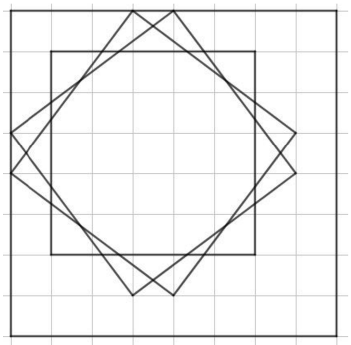
3. feladat: Hányféleképpen lehet kiszínezni egy kocka lapjait három színnel úgy, hogy minden színnel pontosan 2 lapját színezzük be a kockának és a forgatással, tükrözéssel egymásba vihetőeket nem tekintjük különbözőnek?
(7 pont)

3. feladat megoldás: Ha veszünk egy színt, akkor a kockán két szemközti, vagy két élszomszédos lapon lehet. Ez alapján három eset különböztethető meg. *(2 pont)*
Ha az azonos színek mind szemközti lapokon vannak, ebből 1 féle van. *(1 pont)*
Ha az azonos színek élszomszédosak, ez szintén egy eset. *(1 pont)*
Illetve, ha egy színre igaz, hogy szemköztes, kettőre pedig az igaz, hogy szomszédos, ebből pedig 3 különböző van, attól függően, hogy a szemközteseknek melyik színt választjuk. *(2 pont)*
Tehát összesen 5 különböző színezés kétezik. *(1 pont)*

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza

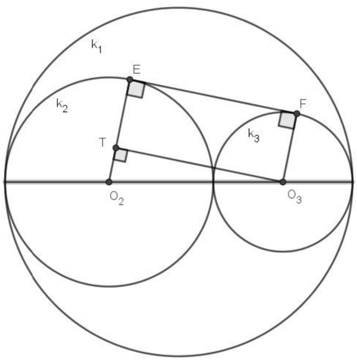
4. feladat: Hányféleképpen helyezhető el egy 8×8-as sakktáblán egy 5×5-ös négyzet úgy, hogy a kisebb négyzet csúcsai a sakktábla mezőinek valamely csúcsára essenek?
(8 pont)

4. feladat megoldás: Ha az 5×5-ös négyzetünk oldalai párhuzamosak a sakktábla oldalaival, akkor 16 ilyen négyzet van *(3 pont)*, de lehetnek ferdén is a tábla oldalaihoz képest, hiszen a 3, 4, 5 pitagoraszi számhármas erre lehetőséget ad *(2 pont)*. Ilyenből pedig van $2 \cdot 4 = 8$ *(2 pont)*, vagyis összesen 24 lehetőség van. *(1 pont)*



5. feladat: k_1 kör sugara 5 cm, k_2 és k_3 körök érintik egymást és k_1 kört is az ábrán látható módon. A k_1, k_2 és k_3 körök középpontjai egy egyenesre esnek. Húzzuk meg k_2 és k_3 körök közös *külső* érintőjét. Ezek E, illetve F pontokban érintik k_2, illetve k_3 köröket. Mennyi lehet $\overline{EF}$ szakasz maximális hossza?
(8 pont)

5. feladat megoldás: A k_2 kör középpontját jelölje O_2, sugarát r_2, k_3 kör középpontját pedig jelölje O_3, sugarát r_3. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $0 < r_3 \le r_2 < 5$. Az O_2EFO_3 négyszög derékszögű trapéz, hiszen a kör középpontjából az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre. *(1 pont)* O_3-ból állítsunk merőlegest az EO_2-re, a talppont legyen T. *(1 pont)* $\overline{EF} = \overline{O_3T}$. Mivel $2 \cdot r_2 + 2 \cdot r_3 = 2 \cdot r$, így $r_2 + r_3 = \overline{O_2O_3} = 5$. *(2 pont)* Az O_3TO_2 háromszög derékszögű, igaz rá hogy a befogó mindig kisebb az átfogónál, vagyis $\overline{O_3T} = \overline{EF} \le \overline{O_2O_3} = 5$. *(2 pont)* Egyenlőség pedig akkor van, ha $r_2 = r_3$. Vagyis $\overline{EF}$ maximuma 5 cm. *(2 pont)*



A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza