Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
8. oszály
II. forduló
MEGOLDÁSOK

1. feladat: Peti, Pali, Lali és Ottó bár nem mind testvérek, mégis ugyanúgy néznek ki. Ottónak Lali a testvére, illetve Peti és Pali is testvérek. Nóra megkérdezte tőlük valamilyen sorrendben, hogy melyikőjük ki, de csak állításokat mondtak, amelyek közül 3 igaz, egy hamis:

1. gyerek: Ottó nem a testvérem.
2. gyerek: A nevemben nincsen p betű.
3. gyerek: A testvérem nevének kezdőbetűje más, mint az enyém.
4. gyerek : Az első, akit kérdeztél, hazudik, és én Peti vagyok.

Ezután Nóra töprengett, de még nem tudta beazonosítani mindegyikőjüket. Azután megtudta, hogy Ottónak, vagy valamelyik P kezdőbetűs gyereknek megváltozott a haja, és azt is, hogy a megváltozott hajút másodikként kérdezte. Valamint azt is megtudta, hogy Pali vagy Lali nem mondott igazat. Amikor újra megkapta ezeket a válaszokat, ugyanazoktól az emberektől, tudta, hogy ki - kicsoda.

Kit hányadikként kérdezett Nóra? *(A feladatot Máté Marcell 6. osztályos tanuló készítette.)*

(10 pont)

1. feladat megoldás: Az első és a negyedik gyerek állítása nem lehet egyszerre igaz, így közülük van az, aki nem mond igazat.

(2 *pont*)

Tehát a második és a harmadik gyerek igazat mond,

(2 *pont*)

valamelyikük Lali, a másik Ottó.

(1 *pont*)

Vagyis Pali nem mond igazat.(Mivel Pali és Lali egyike a füllentő).

(1 *pont*)

Így az első gyerek Peti vagy Pali, tehát ő igazat mond és ezért csak Peti lehet.

(1 *pont*)

A negyediknek kérdezett gyerek hazudik, vagyis ő Pali.

(1 *pont*)

Az első Peti. A második gyerek Ottó. (Ő változtatta meg a haját.) A harmadik Lali. A negyedik Pali.

(2 *pont*)

***Összesen :* ....(10 *pont*)**

2. feladat: Gizi és Vili a képen látható bűvös négyzet kitöltésén tanakodnak. (A bűvös négyzet minden sorában, minden oszlopában és a két átlóban álló $3-3$ szám összege egyenlő. Ez az összeg a bűvös szám.)
Gizi: Nem ismerem a bűvös összeget, így én nem tudom kitölteni ezt a bűvös négyzetet."
Vili: Én sem ismerem a bűvös összeget, de a bűvös szám nélkül is meg tudom mondani, hogy milyen szám áll néhány mezőben."
Legfeljebb hány mezőt adhatott meg Vili és hogyan csinálhatta, ha semelyik sorban, oszlopban, illetve egyik átlóban sem adta meg mind a három számot? Elegendő egy példát mutatnod Vili megkezdett kitöltésére!

	17	
	41	
		23

(10 pont)

2. feladat megoldás: Először megmutatjuk, hogy legfeljebb két mezőt tud a feltételeknek megfelelően megadni. Az a és a b mezőbe nem írhat,

(1 *pont*)

a maradék négy mezőből pedig a kettő zöld egy sorban,

(1 *pont*)

a kettő kék pedig egy átlóban van,

(1 *pont*)

és mivel ismerünk már egy számot, így a zöldek és a kékek közül is legfeljebb egy adható meg.

(2 *pont*)

b	**17**	
	41	
	a	**23**

Most nézzünk erre egy példát!
Vegyük az a mezőt. Az itt lévő szám a második oszlop és a harmadik sor összegében is szerepel.

(1 *pont*)

Ezért $17 + 41 = 23 + x$, ahol x a 3. sor első eleme.

(1 *pont*)

Innen $x = 35$

(1 *pont*)

Hasonlóan a b az egyik átló és az első oszlop közös eleme, ebből a második sor első eleme a 29.

(2 *pont*)

Összesen : **..............(10 *pont*)**

megjegyzés: Ha a versenyző másik kék és/vagy zöld mező értékét adja meg helyesen, akkor is jár a pont.

b	**17**	47
29	**41**	53
35	***a***	**23**

3. feladat: Egy négyzetet darabolj fel háromszögekre úgy, hogy ezen háromszögek mindegyike pontosan három másikkal legyen határos! Egy háromszöget *határosnak* nevezünk egy másik háromszöggel, ha van közös oldaluk vagy oldalaiknak van közös szakasza (amelynek hossza nagyobb nullánál).

Adj meg három különböző ilyen feldarabolást! (Két feldarabolás különböző, ha a háromszögek száma különböző.)

(10 pont)

3. feladat megoldás: Első helyes ábra

(5 *pont*)

Második helyes ábra

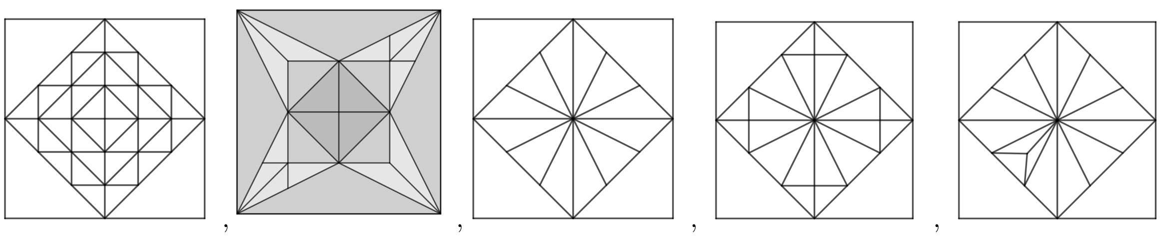
(3 *pont*)

Harmadik helyes ábra

(2 *pont*)

Összesen : **..............(10 *pont*)**

Néhány példa:



4. feladat: Pisti és Karcsi testvérek. Egy nap édesanyjuk a cukrászdából 8 db nagyobb, és 27 db kisebb mignont vitt haza. A nagyobb mignon alakja 3 cm oldalhosszúságú kocka, a kisebbé pedig 2 cm oldalhosszúságú kocka. Minden mignon $5-5$ oldallapja cukormázzal van borítva azonos vastagságban, az aljukra nem tettek mázat. Karcsi és Pisti úgy szeretné elosztani a mignonokat, hogy mindkettőjüknek azonos össztérfogatú mignon jusson, mindketten kapjanak mindkét féléből, és abban is megegyeztek, hogy egyik mignont sem darabolják fel. Lehetséges-e ilyen feltételekkel történő elosztás?

(10 pont)

4. feladat első megoldás: A mignonok összes térfogata cm^3-ben mérve $8 \cdot 27 + 27 \cdot 8 = 432$,

(1 *pont*)

tehát a két fiúnak $216 - 216$ cm^3 mignont kellene kapnia igazságos osztozkodás esetén.

(1 *pont*)

Jelöljük a-val az egyik fiú által kapott kis mignonok számát, b-vel a nagyokét.
Ekkor a kapott mignonok összes térfogata $8 \cdot a + 27 \cdot b = 216$ cm^3 egyenlőség teljesül.

(1 *pont*)

Mivel a 216 és a 8 is osztható 8-cal,

(2 *pont*)

valamint 27 és 8 relatív prímek,

(2 *pont*)

ezért b is osztható kell legyen 8-cal.

(2 *pont*)

Ez viszont azt jelentené, hogy az egyik fiú megkapja az összes nagy mignont,
de ez nem megengedett. Tehát az említett feltételeknek megfelelő elosztás nem lehetséges.

(1 *pont*)

4. feladat második megoldás: Kezdetben az összes nagy mignon az egyik fiúnál, a többi a másik fiúnál van, majd mignonokat cserélnek úgy, hogy a csereáru térfogata egyenlő.

(2 *pont*)

Tehát $a \cdot 8 = b \cdot 27$.

(2 *pont*)

Mivel a 8 és a 27 relatív prímek,

(2 *pont*)

az egyenlőség csak $a = 27$, $b = 8$ esetén lehetséges,

(2 *pont*)

ami azt jelentené, hogy az összes sütit kicserélték.

(1 *pont*)

Tehát a megfelelő elosztás nem lehetséges.

(1 *pont*)

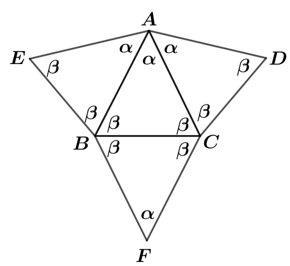
***Összesen* : …………..(10 *pont*)**

5. feladat: Egy egyenlő szárú háromszöget mindhárom oldalára tengelyesen tükröztük, így egy konvex deltoid jött létre. Mekkorák a háromszög szögei?

(10 pont)

5. feladat megoldás: Ha a háromszög szárszöge (α) kisebb $60°$-nál, akkor $60° < \beta < 90°$ miatt az együttes alakzat hatszög, tehát nem deltoid.

(1 *pont*)



Ha a háromszög szárszöge , $\alpha = 60°$, akkor $\beta = 60°$ miatt az együttes alakzat szabályos háromszög, tehát nem deltoid.

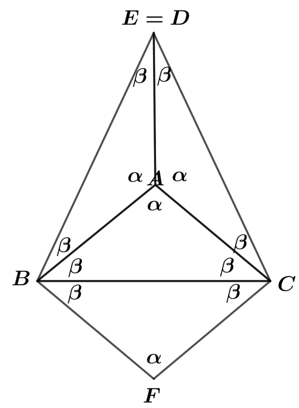
(1 *pont*)

Ha a háromszög szárszöge, $60° < \alpha < 120°$, akkor $\beta < 60°$ miatt az együttes alakzat hatszög, tehát nem deltoid.

(1 *pont*)

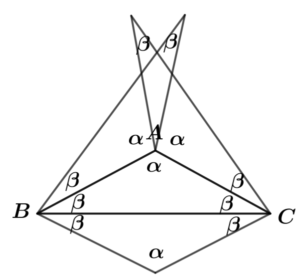
Ha a háromszög szárszöge, $\alpha = 120°$, akkor $\beta = 30°$ miatt az együttes alakzat konvex deltoid. Csúcsai: $E = D, B, F, C$.

(4 *pont*)



Ha a háromszög szárszöge, $\alpha > 120°$, akkor az együttes alakzat szintén nem deltoid.

(2 *pont*)



Így az egyenlő szárú háromszög szögei: $120°, 30°, 30°$.

(1 *pont*)

***Összesen :* ....(10 *pont*)**