BUDAPESTI ÁLTALÁNOS ISKOLÁSOK MATEMATIKA VERSENYE
6. osztály
DÖNTŐ
2008-2009

1. Különös tárgyaláson jártunk. Három vádlott volt, és mindegyikük a másik kettő közül vádolt valakit. Csak az első vádlott mondott igazat. Ha mindegyikük mást vádolt volna, mint eredetileg, de megint csak nem magát, akkor pedig csak a második vádlott mondott volna igazat. Ki volt a bűnös?

   MEGOLDÁS:
   Először az első vádlott mondott igazat, aki a másodikat, vagy a harmadikat vádolta____3p
   Másodjára a második vádlott mondott igazat az elsőt, vagy a harmadikat vádolva._____3p
   Ez úgy lehetséges, ha a harmadik volt a bűnös,___________________________________3p
   és az első először, a második másodszor vádolta a harmadikat.______________________1p
   2. MEGOLDÁS:
   Először az első mondott igazat, és nem magát vádolta, ezért a második, vagy a harmadik a bűnös.____3p
   Azután a második mondott igazat, és nem magát vádolta, _________________________2p
   de nem is az első a bűnös,____3p
   így csak a harmadikat vádolhatta,____1p
   a harmadik tehát a bűnös.____1p

2. Egy téglalap rövidebb oldala 3, az átlója 6 egység hosszú. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói egymással, és az oldalakkal?

   MEGOLDÁS:
   A téglalap átlói egyenlők,____1p
   és felezik egymást____1p
   Ezért ennek a téglalapnak a középpontja és a rövidebb oldala olyan háromszöget határoz meg, melynek mindhárom oldala 3 egység,___________________________________2p
   tehát szabályos. Így szögei 60°-osak.____2p
   Az átlók egymással bezárt szöge ezért 60°,_____________________________________1p
   a rövidebb oldallal bezárt szöge 60°,____1p
   és a másik oldallal 90-60=30°.____2p

3. Egy 3x5-ös táblázat minden mezőjébe egész számokat írunk úgy, hogy a számok összege minden sorban, és minden oszlopban ugyananyi.

a) Mennyi lehet ez az összeg?
b) Adj meg két különböző jó kitöltést!

MEGOLDÁS:
A csupa 0 kitöltés nyilván jó,____1p
ezért az összeg lehet 0.____1p
Más összeg nem lehetséges.____1p
Ha N az összeg, akkor a táblázatba írt számok összege soronként számolva 3N________1p
míg oszloponként számolva 5N____1p
De a feltétel szerint így 3N=5N teljesül, ez csak N=0 esetén lehetséges.______________2p

A csupa 0 kitöltés mellett egy másik lehetséges pl.:________________________________3p

2	-1	0	-1	0
-1	2	0	-1	0
-1	-1	0	2	0

4. Írj egy ötszög csúcsaiba pozitív egész számokat úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsba írt számnak legyen 1-nél nagyobb közös osztója, míg bármely két nem szomszédos csúcsba írt szám legnagyobb közös osztója 1 legyen.

   MEGOLDÁS:
   Bármilyen, a feltételnek megfelelő kitöltés, akkor is, ha nincs magyarázat_____________10p

   A közös osztókat prímtényezős alakban tudjuk könnyen leolvasni, ezért prímszorzatként állíthatjuk elő a számokat.
   Körbejárva a csúcsokat írjunk sorba különböző prímeket, hogy biztosítsuk a relatív prím feltételt.
   Majd újra körbejárva a csúcsokat, minden csúcsba írjuk oda szorzóként az előző csúcsban szereplő prímet, ezzel elértük,hogy a szomszédosak ne legyenek relatív prímek.
   *PL: A=2*11, B=3*2, C=5*3, D=7*5, E=11*7, (Bármilyen prímeket írhattunk volna, minden prím pontosan 2-szer szerepel – két szomszédos csúcson, itt ez a közös osztó- és csak szomszédos csúcspárokon szerepelnek azonos prímek, így átlók mentén a legnagyobb közös osztó csak 1 lehet.*

5. Melyik az $\frac{1}{7}$ tört tizedes tört alakjában a tizedesvesszőt követő 304. számjegy?

   MEGOLDÁS:
   A tizedes tört alak szakasza 6 számjegyből áll:________________________________2p
   142857____1p
   304:6=300, és marad 4____1p
   ezért 300-szor ismétlődik meg a teljes szakasz,_______________________________2p
   majd egy következőből még 4 számjegy szerepel:_______________________________2p
   1428.____1p
   A 304. jegy tehát a 8-as.____1p