2007. szeptember 21.

Bemelegítő feladatok régi Kürschák versenyekről:

1. Biz. $17|2x+3y \Leftrightarrow 17|9x+5y$.

2. Az A, B, C, D pontok egy egyenesen vannak. Szerkesztendő olyan négyzet, melynek két átellenes oldalának egyenese A-n és B-n, a másik kettő C-n és D-n megy át.

3. Biz. x^4+2x^2+2x+2 nem írható fel két másodfokú egész együtthatós kifejezés szorzataként.

4. $a,b,c,d \in \mathbf{Z}$, Biz. $12|(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

5. Hány zérussal végződik 1000!

6. Egy kör gördül egy kétszer akkora sugarú kör belsejében. Milyen pályát ír le a gördülő kör kerületének valamely pontja?

22. Balkán Olimpia feladatai:

7. Legyen ABC hegyesszögű háromszög, melynek beírt köre az AB ill. AC oldalakat D ill. E pontokban érinti. Legyenek X ill. Y az $ACB\angle$ ill. $ABC\angle$ szögek szögfelezőinek metszéspontjai a DE egyenessel és legyen Z a BC szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy az XYZ háromszög akkor és csak akkor egyenlőoldalú, ha $BAC\angle = 60°$.

8. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, amire p^2-p+1 egy egész szám köbe.

9. Legyenek a, b, c pozitív valós számok. Bizonyítsuk be az
$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$
egyenlőtlenséget. Mikor áll fenn egyenlőség?

10. Legyen $n \ge 2$ egész szám. Legyen $S \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ olyan, hogy S nem tartalmaz sem két olyan elemet, amelyek egyike osztója a másiknak, sem két olyan elemet, amelyek relatív prímek. Mi az ilyen S halmazok lehetséges elemszámának maximuma?

Az 1-8. feladatokat megbeszéltük, a 9. és 10. házi feladat.

2007. október 4.

1. a,b,c,d valós számok. $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ és $ac+bd=0$. Mennyi lehet $ab+cd$ értéke?

2. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott AB, a beírt és az AB-hez hozzáírt kör sugara.

3. Egy kocka alakú terem falain mozog három vadászpók. Hálójuk az általuk alkotott háromszögben feszül ki. A teremben röpköd egy légy. A pókok és a légy sebessége azonos. Elkaphatják-e a pókok a legyet?

4. Ketten amőbáznak. Amíg A játékos minden lépésben egy mezőt jelölhet be, addig B játékos minden lépésben kettőt. Akkor nyer B, ha tíz szomszédos jelöltje lesz. Megakadályozhatja-e A, hogy B nyerjen?

5. A k kör belsejében van az $ABCD$ négyzet. Tekintsük azt a kört, amely belülről érinti k-t és érinti az AB és AD egyenesek A-ból induló B-t és D-t nem tartalmazó felét, ez a kör k-t A'-ben érinti.

Hasonlóan kapjuk *B*', *C*' és *D*' pontokat. Igazoljuk, hogy *AA*', *BB*', *CC*' és *DD*' egy ponton mennek át.

6. Hány olyan $p(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ polinom van, amelynek együtthatói 100-nál nem nagyobb különböző pozitív egészek és $p(x)$ osztható x^2+x+1-gyel?

7. a, b olyan pozitív egészek, hogy $p=\frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ prímszám. Legfeljebb mekkora lehet p?

8. BBH a t területű háromszögben $4t\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\right)\le 9R^2$, ahol R a köréírt kör sugara.

2007. október 19.

1. Kiemelhető-e $(a+b+c)$ $(a^3+b^3+c^3-3abc)$-ből;

   (b)Bontsuk szorzattá: $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$.

2. Igazoljuk, hogy $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ racionális szám.

3. Legyenek a, b, c különböző valós számok. Lehet-e $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{b-c}+\sqrt[3]{c-a}=0$?

4. Van 25 különböző súlyú sajtunk. Mindig megtehető-e, hogy valamely sajt kettévágásával a sajtok két 13 darabos, egyenlő súlyú kupacba rendezhetők legyenek?

5. Az *ABC* háromszög belső szögfelezői az *AD* és *BE* szakaszok, ahol *D* és *E* a szögfelezők metszéspontjai a megfelelő szemközti oldalakkal. *ED* felezi az *ADC* szöget. Mekkora a háromszög *A*-nál lévő szöge?

6. Egy számtani sorozat tagjai és differenciája is pozitív egészek. A sorozat első n tagjának a tízes számrendszerbeli alakjában sehol sem szerepel 9-es számjegy. Legfeljebb mekkora lehet n?

7. Keressük meg mindazon pozitív egész n számokat ($n\ge 2$), melyekre teljesül a következő:Minden n-hez relatív prím a és b szám esetén n akkor és csak akkor osztója $(a-b)$-nek, ha $(ab-1)$-nek is.

8. A K kerületű háromszög csúcsainak távolságösszege a sík tetszőleges P pontjától D, a háromszög oldalegyeneseinek távolságösszege P-től M. Bizonyítsuk be, hogy $4D^2\ge 4M^2+K^2$.

9. Keressük meg mindazon véges $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sorozatokat, melyekben minden i-re ($i=0, 1, 2, \ldots, n$) az x_i értéke éppen a sorozatban szereplő i számok számával egyenlő.

2007. november 9.

1. $a\ge b>0$. Biz: $\frac{(a-b)^2}{8a}\le\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\le\frac{(a-b)^2}{8b}$.

2. Határozzuk meg az A szám egészrészét. $A=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}}$.

3. Igaz-e, hogy $\left\lfloor\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\rfloor$ minden pozitív egész n esetén páratlan?

4. Az ABC háromszög belső pontja P, AB=BC. $\mathrm{ABC}\angle=80°$, $\mathrm{PAC}\angle=40°$, $\mathrm{ACP}\angle=30°$. Határozzuk meg a BPC szög nagyságát.

5. Van egy kétkarú mérlegünk és hét súlyunk. Ezek 1, 2, 4, 8, ..., 64 grammosak. Ezekkel az 1-et kimérhetem több módon: pl. egy db 1 grammossal, vagy egy 2-es és egy 1-essel, ez utóbbit a mérendő mellé téve. Igazoljuk, hogy nincs olyan súly, melyet 21-nél több módon is kimérhetünk! Keressük meg mindazokat, melyek 21 féleképpen mérhetők ki!

6. Adott a síkon n olyan pont, hogy bármely kettejük távolsága egész szám ($n\geq 4$).
   (a) Bizonyítsuk be, hogy $n=4$ esetén van két pont, amelyeknek távolsága 3-mal osztható.
   (b) Bizonyítsuk be, hogy $n>4$ esetén a pontok között fellépő távolságoknak legalább az egyhatoda osztható 3-mal.

7. Az $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2003}$ nemnegatív valós számok összege 2, továbbá tudjuk, hogy $s_1s_2+s_2s_3+s_3s_4+\ldots+s_{2002}s_{2003}+s_{2003}s_1=1$. Legyen $S=s_1^2+s_2^2+\ldots+s_{2003}^2$. Határozzuk meg az adott feltételek mellett S lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét.

20007. november 23.

1. Egy kör alakú sziget partján áll hat szikla. A kalózok belevésték a számokat 1-től 6-ig és az 123 és 456 háromszögek magasságpontjai közt félúton elásták a kicset. Visszatérve megdöbbenve tapasztalták, hogy a hullámverés lekoptatta a sziklákról a számokat. Legkevesebb hány helyen kell ásniuk, hogy megtalálják a kincset?

2. Mutassuk meg, hogy n>2 esetén: $3-\frac{2}{(n-1)!}<\frac{2^2-2}{2!}+\frac{3^2-2}{3!}+\ldots\ldots+\frac{n^2-2}{n!}<3$.

3. Letörölhető-e az 1!, 2!, …100! számok közül egy úgy, hogy a többi szorzata négyzetszám legyen?

4. Igazoljuk, hogy $930930 \mid n^{61}-n$ minden n természetes számra teljesül.

5. Milyen maradékot ad 39!, ha maradékosan osztjuk 4100-zal?

6. Nemnegatív valós számok végtelen sorozatát jelölje $a_1, a_2, \ldots$. Van olyan c szám, amelynél nincs a sorozatnak nagyobb eleme. A sorozatról még a következőt is tudjuk:
   $\left|a_i-a_j\right|\geq\frac{1}{i+j}$, minden i, j esetén, ha $i\neq j$. Igazoljuk, hogy $c\geq 1$.

7. Egy sakk körmérkőzésen k ember vett részt és mindenki mindenkivel egyszer játszott. Miután az összes mérkőzés lezajlott kiderült, hogy bármely 4 versenyző között van olyan, aki a többi három versenyző közül egyet megvert, egytől kikapott, a harmadikkal döntetlenben egyezett meg. Legyen ilyen feltételek mellet k a lehető legnagyobb. Bizonyítsuk be, hogy $6\leq k\leq 9$.

8. Az ABC háromszög magasságpontja M, körülírt körének középpontja O, sugara R. Tükrözzük a háromszög csúcsait rendre a szemközti oldalegyenesekre; legyenek a tükörképek X,Y,Z, és tegyük fel, hogy ezek a tükörképek egy egyenesen vannak. Mutassuk meg, hogy $OM = 2R$.

2007. december 14.

1. Megadható-e öt poz. eg. úgy, hogy bármely kettő különbsége éppen a két szám lnko-ja.

2. Lehet-e négyzetszám (a) 4 azonos jegyre végződő szám; (b) $n^2 + d$, ahol $d|n$; (c) $\overline{40...09}$; (d) $(n-1)n(n+1)$; (e) $2d-1$, $5d-1$ és $13d-1$ mindegyike, ha $d \notin \{2,5,13\}$.

3. Az ABC derékszögű háromszögben meghúztuk a beírt kör azon két érintőjét, amelyek merőlegesek az AB átfogóra. Ezek az átfogót P és Q-ban metszik. Mekkora a PCQ szög?

4. Egy hóbortos zöldséges csak három fajta gyümölcsöt árul, almát, körtét és narancsot. Egyszerre csak egyetlen szem gyümölcsöt vehetünk, de hajlandó egy vásárlót napjában több alkalommal is kiszolgálni. Az árak is furcsák: egy alma éppen annyi tallér, ahány körte van még a boltban. Egy körte kétszer annyi tallér, mint ahány narancs van a boltban. Egy narancs éppen háromszor annyi tallér, mint ahány alma van a boltban.
   Furfangos Frigyes egy reggel kifigyelte, hogy a boltban az almák, körték és narancsok száma éppen a=6, k=7, n=3. Szeretné megvásárolni mind a 16 darabot. Legkevesebb hány tallérra van szüksége Frigyesnek és milyen sorrendben vásárolja meg a gyümölcsöket? (Feltételezzük, hogy aznap más vásárló nem volt.) Határozzuk meg a szükséges összeget általában is a, k, n függvényében!

5. Az ABC háromszögben AC=BC, a beírt kör középpontja K. Legyen P az AKB háromszög köré írt kör olyan pontja, mely az ABC háromszög belsejében van. P-n át párhuzamosakat húzunk az AC és BC szárakkal. Ezek AB-t rendre a D és E pontokban metszik. Párhuzamost húzunk P-n át AB-vel is, ez AC-t és BC-t rendre az F és G pontokban metszi.
   Igazoljuk, hogy a DF és EG egyenesek metszéspontja az ABC köré írt körön van!

6. Egy pozitív egész számot közvetlenül egymás után kétszer leírva „dupla” számot kapunk. (Pl dupla szám a 357357, amit a 357-ből kaptunk.) Bizonyítsuk be, hogy a négyzetszámok között végtelen sok „dupla” szám van!

2008. január 11.

1. Tekintsük azokat a konvex négyszögeket, amelyek 100 darab egységnyi oldalú szabályos háromszögre darabolhatók. Mekkorák lehetnek a megfelelő négyszögek oldalai?

2. Adott egy egységnyi oldalú négyzet. Határozzuk meg a négyzet síkjában levő azon körök középpontjainak a halmazát (mértani helyét), amelyeknek a négyzet mind a négy oldalával két közös pontja van.

3. Az a, b, c, d pozitív egészekre ab=cd. Lehet-e a+b+c+d prím?

4. Van-e olyan gömb, amelynek egyetlen pontjára igaz, hogy mindhárom koordinátája racionális?

5. Az 1, 2, …, N számok mindegyike piros, vagy zöld. Egyszerre három szám színét megváltoztathatjuk, ha számtani sorozatot alkotnak. Mely N-re érhető el bármilyen színezésről indulva, hogy minden szám piros legyen?

6. Az *ABCD* konvex négyszög megfelelő csúcsainál meghúztuk a külső szögfelezőket, ezek *a*, *b*, *c*, *d*. Metszéspontjaik $a \cap b = K$, $b \cap c = L$, $c \cap d = M$, $d \cap a = N$. Tudjuk, hogy a *K*-ból *AB*-re, *L*-ből *BC*-re, *M*-ből *CD*-re bocsátott merőlegesek egy ponton mennek át. Bizonyítsuk be, hogy *ABCD* húrnégyszög.

7. Az *a*, *b*, *c* valós számokat úgy választottuk, hogy pontosan egy olyan négyzet van, melynek minden csúcsa rajta van az $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvény grafikonján. Igazoljuk, hogy a négyzet oldala $\sqrt[4]{72}$.

2008. január 25.

1. Leírjuk egy sorba a következő számokat: 1, 1/2, 1/3, 1/4, ….., 1/1993.
   A következő sorba a szomszédosak különbségeit: 1/2, 1/6, ……, 1/(1992·1993). Így folytatva minden sorban egyel kevesebb szám lesz. Mely szám áll az utolsó sorban egyedül?

2. Az *ABC* háromszög *AB* oldalára kifele rajzolunk egy *O* középpontú négyzetet. Legyenek *M* és *N* rendre a *BC* és *AC* oldalak felezőpontjai. *BC*=*a* és *AC*=*b* rögzített, a *C*-nél levő szög változhat. Legfeljebb mekkora lehet *OM*+*ON*?

3. Mutassuk meg, hogy létezik 100 különböző egész olyan sorozata, hogy bármely kettő szomszédosnak négyzetösszege négyzetszám legyen.

4. Egy egyenesen van balra egy piros, jobbra egy kék pont. Bejelölhetünk két új, szomszédos pontot azonos színnel, vagy törölhetünk két meglévő szomszédos azonos színű pontot. Mutassuk meg, hogy nem maradhat a végén csak két pont úgy, hogy balra egy kék, jobbra pedig egy piros. (Szomszédos két pont, ha nincs köztük más jelölt pont.)

5. Bergengóciában 2005 város van. Fejletlen a csőpostahálózat; semelyik két várost nem köti össze közvetlen cső. Az új szabályok értelmében kiépíthetnek közvetlen csőkapcsolatot az *A* és *B* város között, ha létezik még két további város *C* és *D* úgy, hogy nincs közvetlen csőposta sem *A* és *C*, sem *C* és *D*, sem *D* és *B* között. Legfeljebb hány csövet építhetnek ki?

6. A hegyesszögű *ABC* háromszögben $b > g$. A köréírt kör középpontja *O*, az *AO* egyenes *D*-ben metszi *BC*-t. Az *ABD* és *ACD* háromszögek köréírt köreinek középpontjai rendre *E* és *F*. A *B* és *C* kezdőpontú *BA* és *CA* félegyeneseken van rendre *G* és *H* úgy, hogy *AG*=*AC* és *AH*=*AB*. Igazoljuk, hogy *EFGH* akkor és csak akkor téglalap, ha $b - g = 60°$.

7. Legyen *p* egy 2-nél nagyobb prím. A pozitív egészek a_1, a_2, …, a_{p-2} sorozatáról tudjuk, hogy *p* nem osztja sem a_k-t, sem (a_k^k-1)-et (k=1,2, …, p–2). Igazoljuk, hogy a sorozat néhány tagjának szorzata 2 maradékot ad *p*-vel osztva.

2008. február 8.

1. Két parabola adott a síkon, tengelyeik merőlegesek és négy pontban metszik egymást. Igazoljuk, hogy ez a négy pont húrnégyszöget alkot.

2. 16000-nek legfeljebb hány osztója adható meg úgy , hogy egyik sem osztja valamelyik másikat? Gondoljuk meg ugyanezt 900-ra, 27 000-re.

3. Az *ABC* háromszög *AB* oldalán adott a *P* pont, ezen keresztül párhuzamost húzunk a másik két oldallal. Ezek *AC*-t és *BC*-t *M* és *N* pontokban metszik. Szerkesztendő *P*, amelyre *MN* a legrövidebb.

4. Adjunk meg olyan *x*-et, amelyre $\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$. Igazoljuk, hogy *x* irracionális.

5. Igazoljuk, hogy az x^2 előáll két mon. növő polinomfüggvény különbségeként. ∀ polinom előáll?

6. Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív *a*, *b*, *c*, *d* számokra $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$.

7. Az 1 sugarú körbe írt sokszög oldalainak négyzetösszege mely sokszög esetén lesz legnagyobb?

8. *a*, *b*, *c*, *d* olyan nemnegatív valós számok, melyekre $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget: $(a+b)(c+d)\geq 2(ab+cd)$.

9. Egy 2005×2005-ös táblázat elemei az {1, 2, …, *n*} halmazból valók. Az *i*-dik sor elemei alkotják az X_i halmazt, a *j*-dik oszlop elemei alkotják az Y_j halmazt. Melyik az a legkisebb *n* érték, melyre lehetséges, hogy az $X_1, X_2, \dots, X_{2005}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{2005}$ halmazok páronként különbözők?

2008. február 22.

1. Két önmagát nem metsző hétszög csúcsai azonosak, nincs közös élük. Lehetnek-e egybevágóak? Három hétszögre ugyanez.

2. Adott 100 pont a síkon, nincs 3 egy egyenesen. Igazoljuk hogy rajzolható 20 olyan diszjunkt konvex négyszög, amelynek csúcsai az adott pontok közül valók. Rajzolható 22 is?

3. Adjunk meg 8 pontot a síkban, amelyek közül nincs 3 egy egyenesen és semely 5 nem alkot konvex ötszöget.

4. Egy gráf lerajzolását nevezzük kötésnek, ha bármely két élnek pont egy közös pontja van. (Az aB élen nem lehet a gráfnak további csúcsa.) Ez lehet végpont, vagy metszéspont, „érintési” pont nem. Adjunk meg *n* pontú, *n* élű kötést. Adjunk meg *n* pontú *n* élű kört. (Tudomásom szerint megoldatlan, hogy lehet-e kötésnek *n*-nél több éle.)

5. Egy geometriai gráfban minden él szakasz. Ha *n* pontja van a síkban, hány éle lehet, ha bármely kettőnek pontosan egy közös pontja van?

6. Az *ABC* szabályos háromszög belső *P* pontjának az oldalaktól vett távolságai p^2, q^2, r^2. Határozzuk meg azon *P* pontok mértani helyét, amelyre a *p*, *q*, *r* szakaszokból háromszög szerkeszthető.

7. Legyen $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ kölcsönösen egyértelmű leképezés. Igazoljuk, hogy van olyan $u,v:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, kölcsönösen egyértelmű leképezések, amelyekre *f*=*u*+*v*.

8. Legyen *a*>1 pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy bármely *N* egésznek van többese a következő sorozatban: $a_n=\left[\frac{a^n}{n}\right]$.

2008. március 7.

1-2-3 és 4-5-6 az OKTV döntők feladatai II. és III. kategóriából

7. Határozzuk meg $\sum_{i<j} x_i x_j (x_i + x_j)$ maximumát, ahol az x_i –k nemnegatív számok és összegük 1-gyel egyenlő.

8. Az R sugarú gömbbe írt $ABCD$ tetraéderek közül melyikre a legkisebb az $AB^2+AC^2+AD^2-BC^2-CD^2-DB^2$ összeg és mekkora ez az érték?

9. Egy vacsorára sütemény készül, a vacsorán várhatóan p vagy q személy fog résztvenni, $(p,q)=1$. A süteményt szokás szerint egy téglalap alakú tepsiben sütik meg. Legalább hány, nem feltétlenül egyforma részre kell vágnunk a süteményt, ha azt akarjuk, hogy a teljes sütemény szét legyen osztva és minden vendég egyenlő mennyiségű süteményt kapjon, bármelyik is következik be a két lehetőség közül?

2008. április 18.

1. Egy egyirányú utcában n parkolóhely van egymás után. Az utca n autós lakója este munkából jövet elhajt a kedvenc helyéig és ott parkol. Ha foglalt, tovább megy és az első üres helyre beáll. Amennyiben kedvenc helye foglalt és utána sincs üres hely, akkor vadul dudálni kezd. Hányféle lehet a sofőrök kedvenc helyeinek listája, ha soha nem veri fel ádáz dudaszó a környéket?

2. Biz. nincsenek olyan k, m nemnegatív egészek, melyekre $k!+48 = 48(k+1)^m$.

3. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a BC oldal, a hozzá tartozó súlyvonal és a B és C csúcsnál levő szögek különbsége.