2005. szeptember 23.

1. Az *ABC* háromszög súlypontjának az *AB* oldal felezőpontjára vonatkozó tükörképe *D*, a *C* csúcs tükörképe *B*-re *E*. Igazoljuk, hogy *A*, *D*, *E* egy egyenesen vannak.

2. Az *ABC* háromszög megfelelő oldalain vannak az *A’*, *B’*, *C’* pontok úgy hogy az *AA’*, *BB’*, *CC’* egyenesek egy ponton mennek át. Az *A’B’C’* köré írt kör a háromszög oldalegyeneseit az *A”*, *B”* , *C”* pontokban metszi. Igazoljuk, hogy az *AA”*, *BB”*, *CC”* egyenesek egy ponton haladnak át.

A 2. feladat kapcsán átismételtük a Ceva tételt, felelevenítettük a trigonometrikus formáját és megemlítettük egy lehetséges általánosítását; páratlan oldalszámú sokszögekre. (Vigyázat! A megfordítás itt nem működik.) A 2. feladat a Carnot tétel speciális esete, mi csak azt emeltük ki, hogy a feladat ábrája vetítéssel más alakot ölt, tehát a kör helyet más kúpszelet esetén is igaz az állítás.

3. Az *ABC* háromszög *A* csúcsából induló magasságának talppontja *A’*. A *B* és *C* csúcsokból induló súlyvonalak az *AA’* szakaszt *D*-ben és *E*-ben metszik. Igazoljuk, hogy:
$$\frac{EA'}{EA}+\frac{DA'}{DA}=1.$$

4. Az *ABC* háromszög köré írt körét *A*-ban érintő egyenes a *BC* egyenest *A’* pontban metszi. Hasonlóan definiáljuk a *B’* és *C’* pontokat. Igazoljuk, hogy *A’*, *B’*, *C’* egy egyenesen vannak.

A 3. és 4. feladat kapcsán átismételtük a Menelaosz tételt. Ennek bebizonyítottuk a következő általánosítását:

5. Adottak a síkban az A_1, A_2, …, A_n pontok és az ***e*** egyenes. Az A_iA_{i+1} egyenes B_i-ben, metszi ***e***-t, ha $i<n$, az A_nA_1 egyenes B_n-ben metszi ***e***-t. Ekkor:
$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\ldots\cdot\frac{A_{n-1}B_{n-1}}{B_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=(-1)^n.$$

6. Az *ABCD* trapézban a párhuzamos oldalak *AB* és *CD*, *AC*=*BC*. Az *AB* oldal felezőpontja *F*, az *F*-et tartalmazó ***e*** egyenes az *AD* szárat *P*-ben, az *BD* átló *B*-n túli meghosszabbítását pedig *Q*-ban metszi. Legyen $ACP\angle=a$, $QCB\angle=b$. Igazoljuk, hogy $a = b$.

7. Az *ABC* háromszög *BC* és *AC* oldalán adottak *A’* és *B’*. Az *AA’* és *BB’* szakaszok metszéspontja *D*. A *CD* és *A’B’* szakaszok metszésponja *E*. Az $A'EC\angle=90°$, az *ABA’E* négyszög húrnégyszög. Igazoljuk, hogy *AA’*=*BA’*.

2005. október 6.

A házi feladatok megoldása után diofantikus egyenleteket oldottunk meg.

<u>Szorzattá alakítás:</u>

1. $9b+2a=32-6ab \qquad a,b\in \mathbb{Z}$

2. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=n$ egyenletnek hány megoldása van a pozitív egészek körében, ha (a) *n*=2004; (b) ha *n* tetszőleges pozitív egész?

3. Legyen *p* 3-nál nagyobb prím, keressük a pozitív egész megoldásait a következő egyenletnek:
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=p.$$

4. $(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy) \qquad x,y\in \mathbb{Z}$

5. $(xy-7)^2 = x^2 + y^2 \qquad x, y \in \mathbb{Z}$

6. $x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2 \qquad x, y \in \mathbb{Z}$

Egyenlőtlenség, nagyság szerinti sorrend:

7. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5} \qquad x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

8. Lehet-e nyolc szomszédos köbszám összege is köbszám?

Oszthatósági vizsgálat valamilyen modulus szerint:

9. Lehet-e (a) 2001, (b) 2005 szomszédos négyzetszám összege négyzetszám?

10. Mely *p*, *q* prímekre teljesül, hogy $p^3 - q^5 = (p+q)^2$?

Házi feladat

11. $x^5 - y^2 = 4 \qquad x, y \in \mathbb{Z}$

12. $x^3 - y^3 = xy + 61 \qquad x, y \in \mathbb{Z}^+$

13. $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y \qquad x, y \in \mathbb{Z}^+$

2005. október 21.

A házi feladatok közül megbeszéltük a 11. és 12. feladatot. Kiderült, miért érdemes 11-es oszthatóságot vizsgálni a 11-nél és hogyan lehet szorzattá alakítani a 12-esben akár a 3. feladat bal oldalának nevezetes szorzattá alakításával, akár szimmetrikus polinomok segítségével.

1. Egy egynél nagyobb pozitív egész egynél nagyobb kitevőjű hatványát nevezzük hatványszámnak.
   (a) Adjunk meg 4 tagú számtani sorozatot, melynek minden tagja hatványszám.
   (b) Megadható-e akármilyen hosszú számtani sorozat, melynek minden tagja hatványszám?
   (c) Igazoljuk, hogy nem létezik végtelen hosszú számtani sorozat, melynek minden tagja hatványszám.
   (d) Van-e olyan végtelen hosszú számtani sorozat, melynek egyetlen tagja sem hatványszám?

2. Készítsünk *n* darab végtelen sok elemet tartalmazó, diszjunkt halmazt, melyek uniója a pozitív egészek halmaza úgy, hogy tetszőleges halmaz bármely *k* elemének összege alapján el lehessen dönteni, melyik halmazból választották ki a számokat. Oldjuk meg a feladatot, ha (a) *n*=*k*=3; (b) Milyen más *n* és *k* számra találhatunk megoldást? (c) *n*=*k*=2; (d) *n*=4, *k*=2;
   A (b) részre két eredmény született: ha *n* tetszőleges *k* pedig páratlan, illetve ha *n* és *k* relatív prímek.

3. Melyik a legnagyobb pozitív egész melynek jegyei (a szélsők kivételével) kisebbek, mint a szomszédjaik számtani közepe?

4. Három végtelen hosszú számtani sorozatban szerepelnek az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számok, de nem tudjuk, melyik szám, melyik sorozatban. Igazoljuk, hogy az 1980 is benne van valamelyik sorozatban. Mutassuk meg, hogy minden pozitív egész benne van valamelyik sorozatban.

Házi feladat

A 2-es feladat (d) része, továbbá (e) n=k=4.

5. Egy háromszög oldalai egészek, beírt körének sugara 1. Igazoljuk, hogy az oldalak számtani sorozatot alkotnak.

2005. november 18.

A házi feladatok közül az előző szakkör 2. feladatának (d) részét beszéltük meg. Ezt követően rácsgeometriai bevezető következett, melynek során bebizonyítottuk a Pick tételt, végül a II. kategoria OKTV feladatai közükl megoldottuk a két legnehezebbet.

1. (Pick tétel) Ha a rácssokszög határán h, belsejében pedig b rácspont van, akkor a területe $b+\frac{h}{2}-1$.

2. Egy konvex síkidom belsejében 50 rácspont van. Igazoljuk, hogy létezik olyan egyenes, melynek a síkidom belsejébe eső szakaszán legalább 8 rácspont van. (Így adtam fel, igazából ha m^2+1 rácspont van belül, akkor lesz legalább m+1 egy egyenesen.)

3. k darab rácspont között biztosan van három, amelyek által meghatározott háromszög súlypontja is rácspont. Keressük meg a legkisebb k-t, amelyre igaz az állítás, feltéve, hogy a pontok közül semely nincs 3 egy egyenesen.

4. Egy rácstéglalapot, amelyiknek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, 0,5 területű rácsháromszögekre bontunk. Bizonyítandó, hogy a háromszögek között legalább kétszer annyi derékszögű van, mint a téglalap rövidebb oldalának a hossza. (Kürschák verseny 95/1.)

5. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságainak talppontjai legyenek rendre A', B', C', a magasságpont M. A BM szakasz felezőpontja F. $C'F$ és BC metszéspontja Q, $A'B'$ és CC' metszéspontja S. Igazoljuk, hogy QS merőleges AC-re.

6. Legyen $f(n)$ azon n jegyű pozitív egészek száma, amelyekben előfordul az 1-es és a 2-es számjegy is. Mutassuk meg, hogy $f(n)$ nem lehet négyzetszám, ha n>1.

Házi feladat
A 3. és 4. feladat. A következő szakkörön folytatjuk a rácsgeometriát.

2005. december 2.

A házi feladat megbeszélésével kezdtük a szakkört. Az előző szakkör 3. feladatában szereplő k-ról kiderült, hogy értéke 9. Ez a feladat további meggondolnivalókat vetett fel:

i.) Mi a helyzet a feladat három dimenziós testvérénél?
ii.) Egy dimenzióban a feladat már ismerős volt: legalább 5 egész között mindig van három, melyek összege osztható 3-mal. Igazoltuk, hogy legalább 2n-1 egész között mindig van n, melyek összege osztható n-nel.

Ezután rácsgeometriai feladatokat oldottunk meg és a III. kategória OKTV feladataiból csemegéztünk.

1. Igaz-e, hogy a 7k+3, k=0, 1, 2, … számtani sorozatban végtelen sok palindrom szám van?

2. Adott legalább kettő, de véges sok $1/2^k$ alakú szám, amelyek összege legfeljebb 1 (és minden k pozitív egész). Lássuk be, hogy a számok két csoportba sorolhatók úgy, hogy mindkét csoportban a számok összege legfeljebb ½.

3. Egy tetraédernek legalább négy éle legfeljebb egységnyi hosszúságú. Mekkora lehet maximálisan a tetraéder térfogata?

4. Legyen *AB* az *O* középpontú körnek egy olyan húrja, amely nem átmérő. Jelölje *M* az *AB* szakasz felezőpontját, *R* pedig az *OM* félegyenesnek a *k*-val vett metszéspontját. Vegyünk fel egy tetszőleges *P* belső pontot a rövidebbik *AR* íven. A *PM* félegyenes messe a kört a *Q* pontban és legyen *S* az *AB* és *QR* húrok metszéspontja. Az *RS* és *PM* szakaszok közül melyik a hosszabb?

5. Mutassuk meg, hogy csak négyoldalú szabályos rácssokszög létezik.

6. Legyen *n* tetszőleges egész. Igazoljuk, hogy létezik olyan origó középpontú kör, mely legalább *n* rácspontot tartalmaz.

2005. december 16,

1. Igazoljuk, hogy egy $n\times n$-es négyzet legfeljebb $(n+1)^2$ számú rácspontot fedhet le.

2. Keressük meg a következő egyenlet valós megoldásait:
$$\sqrt{x+3}+6\sqrt{x-3}=7\sqrt[6]{x^3-3x^2-9x+27}\,.$$

3. Lássuk be, hogy ha egy *T* tartomány területe nagyobb, mint *n* (pozitív egész), akkor eltolható úgy, hogy a belsejében *n*+1 rácspontot tartalmazzon.

4. Lássuk be, hogy ha egy *T* tartomány területe kisebb, mint 1, akkor eltolható úgy, hogy a belsejében ne legyen rácspont.

5. Az *ABC* és *A'B'C'* háromszögek oldalai *a, b, c* és *a', b', c'*. Igazoljuk, hogy a két háromszög akkor és csak akkor hasonlók, ha
$$\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}.$$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha *n* tetszőleges pozitív egész, akkor létezik *n* olyan pont a síkban, amelyek közül három nincs egy egyenesen, bármely három pont által meghatározott háromszög területe racionális, de bármely két pont távolsága irracionális.

7. Minkowski tétel: Ha az origóra szimmetrikus konvex *T* tartomány területe nagyobb 4-nél, akkor az origón kívül tartalmaz legalább még egy rácspontot.

8. Legyen *N* olyan 16-jegyű pozitív egész, amelynek a jegyei között a 0, 1, 4, 9 nem fordul elő. Bizonyítsuk be, hogy *N*-nek van néhány olyan egymást követő számjegye, amelyek szorzata négyzetszám. Igaz-e ez, ha *N* 15 jegyű?

2006. január 6.

A szakkör elején bebizonyítottuk Minkowski tételének segítségével, hogy minden $4l+1$ alakú prím felírható két négyzetszám összegeként.

Ezután a II. kategória OKTV feladatait oldottuk meg, néhány további feladat társaságában.

1. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget, ha $x>0$:
$$x^{2\sin x-\cos(2x)}<\frac{1}{x}.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy 18 egymást követő háromjegyű szám között van legalább egy, amely osztható jegyeinek az összegével.

3. A valós számokon értelmezett $f(x) = ax^2 - bx + c$ másodfokú függvény *a* együtthatójára 1>|*a*|≠0 teljesül. Bizonyítsuk be, hogy ha *f*(*a*)=–*b* és *f*(*b*)=–*a*, akkor |*c*|<3.

4. Hat zenész muzsikált egy zenei fesztiválon. Minden koncerten néhányan zenéltek, amíg a többiek közönségként hallgatták őket. Legalább hány koncert volt, ha mindenki meg tudta hallgatni a többieket?

5. Az *ABCD* konvex négyszögben *ABD*∠=*ACD*∠. Legyenek a *BC* és *AD* élek felezőpontjai rendre *E* és *F*. Az *AC* és *BD* átlók metszéspontjának az *AB* és *CD* oldalegyenesekre eső merőleges vetületei *G* és *H*. Igazoljuk, hogy az *EF* és *GH* egyenesek egymásra merőlegesek.

6. Camelot szigetén 13 szürke, 15 barna és 17 karmazsin színű kaméleon van. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, akkor mindkettőnek a színe a harmadik színre változik (pl. ha egy szürke és egy barna színű kaméleon találkozik, akkor mindkettőnek a szine karmazsin színre változik). Lehetséges-e, hogy egy idő után minden kaméleon egyforma színű lesz?

Házi feladatok:

1. Legyen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ valós számok sorozata, amelyet az alábbi rekurzióval definiálunk. Igazoljuk, hogy $a_1 \notin (-2;1)$.

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n - 1},\ n \geq 1.$$

2. Határozzuk meg mindazon pozitív egész (b;c) számpárokat, amelyekre a következő sorozatnak csak véges sok tagja lesz összetett.

$$a_1 = b, \qquad a_2 = c, \qquad \text{és} \qquad a_{n+2} = |3a_{n+1} - 2a_n|, \qquad n = 1,2,3,.....$$

3. Jelölje az *ABC* háromszög megfelelő szögfelezőit f_a és f_b, oldalait *a* és *b*. Határozzuk meg a legkisebb *k* számot, amelyre minden háromszög esetén teljesül:

$$\frac{f_a + f_b}{a + b} < k.$$

2006. január 20.

1. Legyenek *AB* és *CD* egy kör húrjai, amelyeknek nincs közös pontjuk, továbbá *K* a *CD* húr egy belső pontja. Szerkesszük meg a kör kerületén a *P* pontot úgy, hogy a *CD* húrnak az *ABP* háromszögbe eső szakaszát a *K* pont felezze.

2. Egy feleletválasztós tesztvizsga 4 kérdésből állt. Minden kérdésre háromféle választ lehetett adni. A vizsgán résztvevő diákokról kiderült, hogy bármely hármójukhoz volt olyan kérdés, amelyre mindhárman másképpen válaszoltak. Legfeljebb hány diák vehetett részt a vizsgán?

3. A *p*, *q*, *r*, valós számok páronként különbözők és teljesül rájuk, hogy *q*=*p*(4–*p*), *r*=*q*(4–*q*), *p*=*r*(4–*r*). Mi lehet *p*+*q*+*r* értéke?

2006. február 3.

Ezt a szakkört Kós Géza vezette.

2006. február 17.

A szakkör elején a prímekkel kapcsolatban áttekintettünk néhány kérdéskört, ezután következtek a feladatok.

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok $4k+1$ és végtelen sok $4k-1$ alakú prím van.

2. Mutassuk meg, hogy van olyan prím, amely előtt és után közvetlenül egymás után legalább 100 összetett szám áll.

3. Mely páros számok írhatók fel két páros összetett szám összegeként? Mely páros számok írhatók fel három páratlan összetett szám összegeként?

4. Az a, b, c, d egész számokra teljesül, hogy $n|ab$, $n|cd$ és $n|ac+bd$. Igazoljuk, hogy ekkor $n|ac$ és $n|bd$.

5. Létezik-e végtelen hosszú számtani sorozat, melynek minden eleme prím?

6. Egy 6 tagú számtani sorozat minden eleme pozitív prím. Igazoljuk, hogy a differencia osztható 30-cal.

7. Határozzuk meg x-et, ha a következő számok mind prímek: (a) x, $x+2$, $x+4$; (b) x, x+6, $x+12$, $x+18$, $x+24$; (c) x, x^2+8; (d) x^4+4.

8. Igazoljuk, hogy a következő összegek közül egyik sem lehet egész: (a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p}$ (p prím); (b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}$ (k>1, poz. eg.); (c) $\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+...+\frac{1}{k+l}$.

2006. március 3.

Az OKTV II-III. kategória döntők feladatait beszéltük meg.

1. A nemnegatív egészeken értelmezett $t(n)$ függvényre $t(0)=t(1)=0$, $t(2)=1$. Ha $n>2$, akkor $t(n)$ a legkisebb olyan pozitív egész, amely nem osztja az n számot. Legyen
   $T(n)=t(t(t(n)))$.
   Határozzuk meg S értékét, ha $S=T(1)+T(2)+T(3)+....+T(2005)+T(2006)$.

2. Építünk egy, az A kezdőpontból induló, összesen 2006 darab útszakaszból álló úthálózatot, amely körutat nem tartalmaz. (Ezt úgy értjük, hogy a hálózat bármely pontjából bármely másik pontjába pontosan egy módon juthatunk el egymáshoz csatlakozó útszakaszokon.) Bármely két útszakasznak nincs közös belső pontja és legfeljebb egy végpontjuk közös. Az úthálózat egyik pontjába egy értéktárgyat rejtettünk el. Az A kezdőpontból elindul egy játékos, aki ezt szeretné megtalálni. Minden elágazásnál az onnan induló, még be nem járt útszakaszok közül egyenlő valószínűséggel választja ki, merre menjen tovább. Visszafordulni nem szabad útja során. Az úthálózatot úgy építettük meg, hogy a legkisebb legyen a valószínűsége annak, hogy a játékos megtalálja az értéktárgyat. Mekkora ez a minimális valószínűség?

3. Adott a síkon egy K középpontú egységsugarú kör és egy ezt nem metsző e egyenes. K-ból az e egyenesre emelt merőleges talppontja O, $KO=2$. Legyen H azoknak a köröknek a halmaza, amelyeknek a középpontja e-n van és kívülről érintik a K középpontú egységkört. Bizonyítsuk be, hogy van a síkon olyan P pont, amelyből H minden körének e-n levő átmérője ugyanakkora 0°-nál nagyobb) szögben látszik. Határozzuk meg P helyzetét és a látószög mértékét.

4. Egy tetszőleges, nem derékszögű háromszög esetén rajzoljuk meg a talpponti háromszöget, majd ennek a talpponti háromszögét stb. Hány olyan páronként nem hasonló háromszög létezik, amelynek a szögei fokokban mérve egész számok, és az eljárás során előbb-utóbb az eredetihez hasonló háromszöghöz jutunk?

5. Az r és s pozitív egészekről tudjuk, hogy bármely k pozitív egészre ks-nek legalább annyi osztója van, mint kr-nek. Lássuk be, hogy r osztója s-nek.

6. Egy kocka élhossza n egység. A felületét alkotó $6n^2$ darab egységnégyzet közül maximálisam hányat lehet kijelölni úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös oldala?

2006. március 17.

A március 8-án lezajlott válogatóverseny feladatait beszéltük meg először.

1. Legyen $H=\{1,2,3,\ldots,100\}$. A H halmaz egy részhalmazát összefüggőnek nevezzük, ha csak egyetlen számot, vagy néhány szomszédos számot tartalmaz. Határozzuk meg a legnagyobb k egészt, amelyre megadható H-nak k részhalmaza úgy, hogy közülük bármely két különbözőnek a metszete összefüggő.

2. Az ABC háromszögben $AB+BC=3AC$. A beírt kör az AB és BC oldalakat rendre D és E pontokban érinti, a beírt kör középpontja I. D-t és E-t az I pontra tükrözve a G és H pontokat kapjuk. Igazoljuk, hogy $ACGH$ húrnégyszög.

3. Jelölje **R** a valós számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan f: **R**→**R** függvényt, amelyre
$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+2xy+1$$
teljesül **R** minden x, y elemére.

További feladatok:

4. Legyenek a, b, c olyan egészek, melyek összege 0. Igazoljuk, hogy $2a^4+2b^4+2c^4$ négyzetszám.

5. Az a, b, c, d természetes számokra teljesül hogy $ab=cd$. Bizonyítsuk be, hogy $a^{2006}+b^{2006}+c^{2006}+d^{2006}$ összetett szám.

6. Az a, b, c, d, e egész számokról tudjuk, hogy összegük és négyzeteik összege is osztható a t páratlan számmal. Bizonyítsuk be, hogy $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ szintén osztható t-vel.

2006. április 7.

A szakkört Kós Géza tartotta.

1. Az $ABCD$ négyzet belsejében melyek azok a P és Q pontok, amikre $AP+BP+PQ+CQ+DQ$ minimális?

2. Az $ABCD$ egységnégyzet belsejében adott a P és Q pont. Bizonyítsuk be, hogy $13(PA+QC)+14PQ+15(PB+QD)\geq 2\sqrt{365}$.

3. Legyen $ABCDEF$ egy konvex hatszög, amelyre $AB=BC=CD$, $DE=EF=FA$ és $BCD\angle=EFA\angle=60°$ teljesül. Legyen G és H a hatszög két olyan belső pontja, amelyekre $AGB\angle=DHE\angle=120°$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy $AG+GB+GH+DH+EH{}^3CF$.

4. Az *EF* átmérőjű *k* kört az *e* egyenes az *E* pontban érinti. Tekintsük az *e* egyenes összes olyan *A*, *B* pontpárját, melyre az *AB* szakasz az *E* pontot tartalmazza és $AE \cdot EB$ egy rögzített állandó. Egy ilyen pontpár esetén legyen *A'*, illetve *B'* a *k* kör metszéspontja az *AF*, illetve *BF* szakasszal. Igazoljuk, hogy az *A'B'* szakaszok egy ponton mennek keresztül.

5. Legyen *D* az *ABC* hegyesszögű háromszög olyan belső pontja, amelyre $ADB\angle = ACB\angle + 90°$ és $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

   (a) Határozzuk meg az $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$ hányados értékét.

   (b) Bizonyítsuk be, hogy az *ACD*, illetve a *BCD* háromszög körülírt köréhez a *C* pontban húzott érintők merőlegesek.

6. Adottak az *e* egyenesen az *A*, *B*, *C* és *D* pontok ebben a sorrendben. Mi azon *P* pontok mértani helye a síkban, amelyekre az *APB* és *CPD* szögek egyenlők?

2006. április 28.

Az idei Városok Viadala versenyének tavaszi feladataiból oldottunk meg néhányat.

1. Létezik-e 100 olyan (*a*, *b*) számpár, amire *a*, *b* és *ab* minden jegye legalább 6?

2. Az *ABC* hegyesszögű háromszög *AB* és *BC* oldalaira kifele rajzoltuk az egybevágó *ABMN* és *LBCK* téglalapokat. Igazoljuk, hogy *AL*, *NK* és *MC* egy ponton haladnak át.

3. Egy 5×5-ös táblázatban különböző egész számok vannak. Aladár kiválasztja a legnagyobbat, majd letörli sorát és oszlopát. Ezt ötször ismétli, mindig a maradék táblázattal, a kapott öt szám összege legyen *A*. Ugyanígy jár el Bendegúz is, csak ő mindig a legkisebb számot választja, az ő összege lesz *B*. Lehet-e, hogy *B*>*A*? Lehet-e, hogy *B* nagyobb minden más olyan számötös összegénél, melyekre bástyákat helyezve, azok nem ütik egymást?

4. $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$. Igazoljuk, hogy minden pozitív egész k esetén $\left(p(x)\right)^k$ polinomnak van negatív együtthatója.

5. Az *ABC* háromszög szögfelezője *BC*-t *A'*-ben metszi. Legyen az *AA'* szakasz tetszőleges belső pontja *X*. $BX \cap AC = B'$, $CX \cap AB = C'$, $B'A' \cap CC' = P$, $C'A' \cap BB' = Q$. Igazoljuk, hogy $C'AQ\angle = B'AP\angle$.

6. Van-e olyan *n* és *k* pozitív egészek amelyre 2^n balról olvasott első jegyei éppen 5^k és 5^n balról olvasott első jegyei éppen 2^k?