

Szakköri feladatsor 7.

40. Legfeljebb mekkora lehet az $a_n = n^2 + 150$, $n = 1, 2, \dots$ sorozat két szomszédos tagjának legnagyobb közös osztója?

41. Határozzuk meg a $K = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

kifejezés értékészletét, ha $a, b, c > 0$.

42. Oldjuk meg az $m^3 = n^3 + 3789$ egyenletet a természetes számok körében. (Balkáni Olimpia)

43. Töltsük ki a 4×4 -es táblázat mezőit $+1$ vagy -1 számokkal úgy, hogy minden mezőre teljesüljön, hogy

a) a szomszédos mezőkre írt számok szorzata egyenlő a mezőben lévő számmal.

b) a szomszédos mezőkre írt számok szorzata $+1$ legyen.

(Szomszédosaknak a közös éllel rendelkező mezőket tekintjük.) Hány megoldás van?

44. Legfeljebb hány számot választhatunk ki az $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ halmazból úgy, hogy

a) egyik se legyen osztható semelyik másikkal;

b) páronként relatív prímek legyenek?

45. Vegyük fel az ABCD négyzet BC oldalán az E, DC oldalán az F pontokat úgy, hogy $BE + DF = AE$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy $\angle DAF = \angle FAE$. (Balkáni Olimpia)

Szakköri feladatsor 8. – számelmélet, geometria

46. Adott 33 természetes szám, amelyek prímosztói a 2, 3, 5, 7, 11 számok közül kerülnek ki. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük két olyan szám, amelyek szorzata négyzetszám. (Bulgária, Matematikai Olimpia, 1994)

47. Bizonyítsuk be, hogy 13^n bármely pozitív egész n szám esetén előáll két négyzetszám összegeként.

48. $x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2004}$, x, y, z egész számok.

49. Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 1$ pozitív egész szám, akkor

$x = \sqrt{n + \sqrt{n+1}}$ irracionális. (Balkáni Olimpia)

50. (játék) Egy táblára felírtunk néhány pozitív egész számot. Ezután minden lépésben letörlünk két számot, és a helyükre felírjuk a legnagyobb közös osztójukat és a legkisebb közös többszörösüket. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után a táblán lévő számok nem változnak tovább.

51. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja F. Az A csúcsból induló szögfelező a CF szakaszt M-ben, a BC befogót E-ben metszi. Mekkora a háromszög szögei, ha $EC = EM$?

52. Egy konvex sokszögben legfeljebb hány olyan szög lehet, amely 170° -nál kisebb?