1. Kiderülünk az ablakon

1.1. Bognár András Károly

BAK/1. Bizonyítsuk be, hogy ha létezik páratlan tökéletes szám, akkor **a)** 4k+1 alakú **b)** ha osztóinak száma (önmagát is beleértve) m, akkor $m = 4x + 2$, ahol k és x nemnegatív egészek. (Tökéletes szám az a pozitív egész, amire a szám önmagánál kisebb pozitív osztóinak összege maga a szám, pl.: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$).

BAK/2. ABC háromszög A pontjából állítsunk merőlegest az AB, a B pontjából a BC és a C pontjából az AC szakaszra. Az A és C pontból állított merőlegesek metsszék egymást D-ben, az A és B pontból állított merőlegesek metsszék egymást E-ben, míg a B és C pontból állított merőlegesek metsszék egymást F-ben. Ehhez hasonlóan állítsunk merőleges az AB, AC, BC szakaszokra rendre a B, C és A pontokból; az A és B pontból állított merőlegesek metsszék egymást G-ben, míg a B és C pontból állított merőlegesek metsszék egymást H-ban, az A és C pontból állított merőlegesek pedig I-ben. Bizonyítsuk be, hogy az IF, HE és DG szakaszok metszéspontja az ABC háromszög köréírt körének középpontja.

BAK/3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább három, akkor a körök hosszainak legnagyobb közös osztója vagy egy vagy kettő.

BAK/4. Biz. be, hogy ha három szám szorzata 1, és összegük nagyobb a reciprokösszegüknél, akkor a három szám közül pontosan egy olyan van, amely nagyobb 1-nél.

BAK/5. A koordináta-rendszer egy pontját racionális pontnak nevezzük, ha mindkét koordinátája racionális szám. Bizonyítsuk be, hogy egy körön akkor lehet csak 2-nél több racionális pont, ha a pontok száma $4k$ alakú.

BAK/6. Mutassuk meg, hogy egy T területű és egy K kerületű konvex sokszögben el lehet helyezni egy $\frac{T}{K}$ sugarú kört.

BAK/7. Egy szelet csokoládét több lépésben osztunk részekre. Minden lépésben a már meglevő részek közül a legnagyobb tömegűt (ha több ilyen van, azok egyikét) osztjuk tovább úgy, hogy a kapott új darabok egyike se legyen nagyobb tömegű, mint a most tovább osztott rész fele. Igazoljuk, hogy a k-adik lépés után kapott részek mindegyike kisebb, mint az eredeti csokoládé tömegének a $2/(k + 1)$-edrésze.

BAK/8. Két játékos a következő játékot játssza. A táblára felírják a 2 számot. A játékosok ezután felváltva lépnek: minden lépésben az aktuális számot 1-gyel növelik vagy megduplázzák. Az a játékos veszít, aki egy bizonyos, előre rögzített n számnál nagyobbat ír. Az n értékétől függően kinek van nyerő stratégiája?

1.2. Kercsó-Molnár Anita

KMA/1. Egy 13×13-as táblázat mezőibe úgy írtak számokat, hogy a 13 sorban és a 13 oszlopban ugyanannyi a számok összege. Legalább hány számot kell a táblázatban ahhoz megváltoztatni, hogy a 26 darab összeg között ne legyenek egyenlők?

KMA/2. Keressük azt a minimális T-t, melyre bármely egységhosszú folyamatos görbe (vonal) lefedhető egy T területű téglalappal.

KMA/3. Adott p prímszám. Adjuk meg az összes k egész számot, melyre $\sqrt{k^2 - pk}$ pozitív egész.

KMA/4. Három iskola mindegyikében n tanuló van. Minden tanuló a másik két iskolából együttvéve $n + 1$ tanulót ismer. Bizonyítsuk be, hogy választható a három iskola mindegyikéből egy-egy tanuló úgy, hogy mindegyikük ismeri a másik kettőt. (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel.)

KMA/5. $ABCD$ húrnégyszög köré írt körének középpontja O. Az ABO és a CDO körök O-tól különböző metszéspontja P pont, ami a DAO háromszög belsejébe esik. Válasszuk ki az OP szakasz P-n túli meghosszabbításán a Q, az OP szakasz O-n túli meghosszabbításán pedig az R pontot. Bizonyítsuk be, hogy $QAP\angle = QBR\angle$ akkor és csak akkor teljesül, ha $PDQ\angle = RCO\angle$.

KMA/6. Jancsi csiga a koordinátarendszer $(0; 0)$ pontjában lakik. Juliskával találkozója van az $(a; b)$ pontban. Hányféleképpen juthat el hozzá egy n egység hosszú úton, ha csak a rácsvonalakon közlekedhet?
(Jancsi szeret csúszkálni, előfordulhat, hogy egy szakaszon többször is átmegy.)
(Szumma nélkül fejezzük ki.)

KMA/7. Adottak a, b, c, d pozitív egészek és $r = 1 - \dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{c}$.
Tudjuk, hogy $a + c \leq 428$ és $r > 0$, bizonyítandó, hogy $r > \dfrac{1}{429^3}$.

KMA/8. Adott ABC háromszög. Legyenek A_1 és B_1 pontok rendre a háromszög BC és AC oldalain, D pont AA_1 és BB_1 metszéspontja, E pont AB_1 és CD metszéspontja. Bizonyítandó, hogy amennyiben $A_1EC\angle = 90°$ és A, B, A_1, E pontok egy körön vannak, akkor $AA_1 = BA_1$.

1.3. Máté Lőrinc

ML/1. A világon 1998 repülőtér van. Tudjuk, hogy akármelyik három repülőtérre van olyan 2, amely között nincs közvetlen járat. Maximum hány közvetlen járat lehet a repülőterek között?

ML/2. Találd meg az összes olyan pozitív egész x, n párost, amelyre teljesül, hogy $x^n + 2^n + 1$ osztja a $(x^{n+1} + 2^{n+1} + 1)$-t.

ML/3. Egy pozitív valós számokból álló sorozat a következőképpen van definiálva: $x_{n+2} = \dfrac{1 + x_{n+1}}{x_n}$, ahol $n = 0, 1, 2 \ldots$. Mivel egyezik meg x_{1998}?

ML/4. Egy ABC hegyesszögű háromszögben a körülírható kör középpontja legyen O. S legyen a BCO háromszög körülírható körének a középpontja. K legyen az a pont melyre OK az S körének átmérője. D, E legyen az S kör és az AB, AC egyenesek második metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy az $ADKE$ négyszög egy paralelogramma.

ML/5. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\frac{9}{a+b+c} \leq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \quad \text{és} \quad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

ML/6. Találd meg az összes páronként relatív prím pozitív egészeket az ℓ, m, n számokra, ha:

$$(\ell + m + n)\left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

egy egész szám.

1.4. Nádor Benedek

NB/1. Az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $a + b + c = 3$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^2}{a + \sqrt[3]{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt[3]{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2}$$

NB/2. Egy olyan osztály, ahol k kölcsönös barátság van a diákok között, kirándulásra indul 2 busszal. A tanáruk szeretné, hogy a kirándulás emlékezetes legyen és sok új barátság szülessen, ezért úgy próbálja elhelyezni a tanulókat, hogy egy buszon belül a barátságok száma a lehető legkevesebb legyen. Bizonyítsuk be, hogy el tudják érni, hogy mindkét buszon belül legfeljebb $\frac{k}{3}$ barátság legyen!

NB/3. Keresd meg az összes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amire bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(xy + f(xy)) = 2xf(y).$$

NB/4. Adott négyzeteknek egy végtelen sorozata, az oldalak hossza rendre $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan négyzet, amelyben mindezek átfedés nélkül elhelyezhetők, és keressük meg a legkisebb ilyen négyzetet.

NB/5. Ki lehet-e választani 5 pontot a térben úgy, hogy minden 1 és 10 közötti k egészhez találunk 2 kiválaszott pontot, amik távolsága k?

NB/6. Adjuk meg az összes pozitív egészekből álló a, b számpárt, amire

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2009}.$$

NB/7. Az ABC hegyesszögű egyenlőszárú háromszög, alapja BC, köréírt körének középpontja O, magasságpontja H. Bizonyítsuk be, hogy BOH köréírt körének középpontja AB egyenesre esik!

NB/8. Keresd meg az összes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amire bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy)).$$

2. Leave us alone - we know what we're doing

2.1. Móra Márton Barnabás

MM/1. Legyenek a és b pozitív egész számok. Tudjuk, hogy $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ egész.
Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ négyzetszám is.

MM/2. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 3)$ valós számok, amelyekről tudjuk, hogy $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$ és $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq n^2$. Bizonyítsuk be, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok között van 2-nél nem kisebb.

MM/3. 100 elítélt nevét valamilyen sorrendben beleteszik 100 sorszámmal ellátott fiókba. Ezek után az egyszemélyes celláikból egyesével véletlenszerűen behívják a rabokat. Mindegyikük tetszése szerint kihúzhat egyesével 50 fiókot. Ha megtalálta valamelyikben a saját nevét, akkor elvezetik egy külön terembe, ha nem, akkor az összes elítéltet azonnal kivégzik. Végül, ha mindannyian szerencsével jártak, valamennyiüket szabadon engedik. Mutassuk meg, hogy e szabályok ismeretében a rabok ki tudnak dolgozni egy olyan stratégiát, amelyet alkalmazva $\frac{3}{10}$ -nél nagyobb az esélye annak, hogy kiszabadulnak.

MM/4. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott egy szöge, továbbá a szög csúcsából induló magasságának és súlyvonalának hossza.

MM/5. A B-4777-es bolygón háromféle nép él: az alfák, a béták és a gammák. Az egyik népbe tartozóknak (nem feltétlenül az alfáknak) 2 kezük, a másik népbe tartozóknak 3 kezük, a harmadik népbe tartozóknak pedig 4 kezük van. Az egyik népnél (nem feltétlenül a 2 kezeseknél) egy-egy kézen 4 ujj van, a másik népnél 5 ujj, a harmadiknál 6 ujj van egy-egy kézen. Mindegyik nép olyan alapú számrendszert használ, ahány kézujja van. (Ha pl. a 4 kezeseknek 6-6 ujja van: ők 24-es alapú számrendszert használnak.) Az alfák saját számrendszerében felírt 64_α száma megegyezik a béták 51_β számával. Hány keze, és azon hány ujja van az alfáknak, a bétáknak, illetve a gammáknak?

MM/6. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem konstans függvényrol azt tudjuk, hogy minden valós x esetén

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = c,$$

ahol c rögzített egész konstans. Igazoljuk, hogy ha $f(x)$-nek van egész fixpontja, akkor van két olyan fixpontja is, amely nem egész. (z *fixpont*ja $f(x)$-nek, ha $f(z) = z$.)

MM/7. Az $A = a, b, c, d$ halmaz súlya legyen $a \cdot b \cdot c \cdot d$. Mennyi a $H = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2014}\right\}$ halmaz páros elemszámú (nem üres) részhalmazai súlyainak összege?

MM/8. Tegyük fel, hogy p egy nem azonosan 0 egész együtthatós polinom, melyre $p(n)$ minden n egész számra osztható 2016-tal. Legalább mennyi p együtthatói abszolút értékének összege?

2.2. Móricz Benjámin

MB/1. Adott a síkban 5 pont úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesre. Igazoljuk, hogy az általuk meghatározott háromszögek közül legfeljebb hét hegyesszögű!

MB/2. 2 játékos, 2021 kavics. A két játékos felváltva lép és mindig a soron következő játékos eldöntheti, hogy a kavicsokból $1 - 2^i$-ig mennyit vesz el, az i+1. elvétel esetén. Az nyer aki az utolsó kavicsot elveszi. Kinek van nyerő stratégiája?

MB/3. Adott egy egységnyi területű ABC derékszögű háromszög. A háromszög oldalaira kifelé rajzoltunk négyzeteket, amelyek középpontja D, E ésF. Igazoljuk, hogy DEF területe legalább 2 egység!

MB/4. Az a_0, a_1, ... , a_{10} egész számok összege 11. Legfeljebb hány megoldása lehet az $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{10}x^{10} = 1$ egyenletnek?

MB/5. Egy bűvészmutatványon a közönség egy tagja gondol két tetszőleges n és k pozitív egészre úgy, hogy $n > k$, valamint leír egy n-hosszú 0 és 1-ből álló sorozatot. Ezután a mutatvány vezetője leírja az összes olyan n hosszú sorozatot, ami pontosan k helyen tér el az eredeti sorozattól. A bűvész csak ezeket a számokat látja. Mennyi tippből tudja biztosan kitalálni a bűvész az eredeti sorozatot?

MB/6. Az $a_0, a_1, ...$ pozitív egészekből álló sorozatra igaz, hogy $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, ha $\sqrt{a_n}$ egész, más esetben $a_{n+1} = a_n + 3$. Milyen $a_0 > 1$ esetén fog a sorozatban legalább 1 érték végtelenszer előfordulni?

MB/7. Aladár a következő játékot játssza egy 9 mezőből álló táblázatban: kezdetben a mezők üresek és Aladár minden lépésben eldöntheti, hogy beír egy üres mezőbe egy 2^j alakú számot, ahol j nemnegatív egész vagy pedig két egyforma számot kicserél az összegükre és azt írja az egyik helyére, a másik helye üresen marad. Tudjuk, hogy a játék végén 8 üres mező maradt és a 9. mezőben 2^n áll, ahol n adott. Határozzuk meg Aladár lépéseinek maximális számát n függvényében!

MB/8. Tegyük fel, hogy $a^{11} + b^{22} \leq 1$ és $a^{22} + b^{11} \leq 1$, ahol a és b pozitív valósak! Igazoljuk, hogy ekkor $a^{11+k} + b^{22-k} \leq 1$, ha $0 \leq k \leq 11$, és k egész!

2.3. Németh Márton

NM/1. Hány olyan (a, b, c) egész számhármas van, ahol $1 \leq a, b, c \leq 100$, és tetszőleges n természetes szám esetén a^n, b^n és c^n egy háromszög oldalai?

NM/2. Egy n-szög alapú gúlának legfeljebb hány élét metszheti egy S sík (a gúla alapja nem feltétlenül szabályos sokszög, S nem megy át a test egyik csúcsán sem)?

NM/3. Anna és Bea a következő játékot játszák: Bea kezdetben egy n csúcsú irányítatlan gráf egy ismeretlen csúcsában van, majd minden körben Anna tippel el csúcsra. Ha Bea éppen ott volt, akkor Anna azonnal nyer, különben Bea átlép egy szomszédos csúcsba. Milyen gráfok esetén tud Anna biztosan véges sok lépésből nyerni?

NM/4. Létezik-e az $0, 1, 2, ..., n-1$ számok egy $a_0, a_2..., a_{n-1}$ permutációja, melyre minden $1 \leq i < n$ esetén a_i és a_{i+1} kettes számrendszerbeli felírása pontosan egy számjegyben különbözik (pl.: 1001 és 1011 egy számjegyben különböznek), ha
a) n kettőhatvány? **b)** n tetszőleges pozitív egész szám?

NM/5. Egy táblázatnak 16 oszlopa, és n sora van. Minden mezőt vagy feketére, vagy fehérre festhetünk, majd a táblázat oszlopait véletlenszerűen megkeverik, számunkra ismeretlen módon. Ezután minden kérdésünkre megmondják, hogy egy általunk meghatározott sor előállt-e az oszlopok megkeverése után. Megfelelő színezés esetén meg lehet-e határozni, hogyan lettek összekeverve az oszlopok, ha...
a) n tetszőlegesen nagy, és bármennyit kérdezhetünk?
b) $n = 32$, és legfeljebb 64-szer kérdezhetünk?

NM/6. Adott egy n számból álló sorozat, amit nem ismerünk. Egy kérdéssel megkérdezhetjük, hogy az i-edik és a j-edik $(1 \leq i < j \leq n)$ elem egyenlő-e. Feladatunk kideríteni, hogy van-e olyan elem, ami több, mint $\frac{n}{2}$-ször szerepel a sorozatban.
a) Adjunk meg stratégiát, ami ezt megoldja $n = 32$ esetén legfeljebb 144 kérdéssel.
b) Adjunk meg olyan $c > 0$ valós számot, és egy olyan stratégiát, mely tetszőleges $n \geq 2$ esetén megoldja a feladatot legfeljebb cn kérdéssel.

NM/7. Adott egy labirintus (egy négyzetrácson véges számú mező a labirintus belseje, néhány szomszédos négyzet között fal van, a labirintus belsejét képező mezők közül bármelyikről el lehet jutni olyan mezőre, mely nem a labirintus belseje, anélkül, hogy falon mennénk át), ez azonban számunkra láthatatlan. Van egy robot, akinek utasításokat lehet adni, egy utasítás a négy irány egyikének felel meg. Ha a robot tud az adott irányba lépni, akkor lép, ha falba ütközne, akkor nem csinál semmit. Létezik-e olyan (akár végtelen) utasítás-sorozat, mely tetszőleges labirintusból véges sok lépés után kijuttatja a robotot?

2.4. Világi Áron

VÁ/1. Melyik az a legkisebb n pozitív egész szám, amelyre $3^{2n} - 1$ osztható 2^{2010}-nel?

VÁ/2. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan derékszögű háromszög van, amelyben az oldalhosszak relatív prím egész számok, és az átfogó hosszából bármelyik befogó hosszát levonva egy-egy köbszámot kapunk.

VÁ/3. Jelölje p_i az i-edik prímszámot és legyen $Q_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Igazoljuk, hogy az $1, 2, \ldots, Q_k$ számok között pontosan $Q_k/2$ darab olyan van, amely a $p_1, \ldots, P_k$ közül páratlan sokkal osztható.

VÁ/4. Lássuk be, ha p prímszám, akkor np osztója $\binom{np}{p} - n$-nek.

VÁ/5. Mutassuk meg, hogy $\sum_{k=1}^{m} \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)k}{m^{k+1}} = 1$.

VÁ/6. Adott a síkon n darab pont. Mutassuk meg, hogy kiválasztható közülük három – mondjuk A, B és C – úgy, hogy $ABC\sphericalangle \leq 180°/n$.

VÁ/7. Jelöljünk ki az AB szakaszon $2n$ pontot úgy, hogy a pontok a szakasz felezőpontjára szimmetrikusan helyezkedjenek el. Kiválasztunk tetszőleges n-et a pontok közül s azokat pirosra, a megmaradt n-et pedig kékre festjük. Összeadjuk a kék pontoknak az A ponttól mért távolságait, valamint összeadjuk a piros pontoknak a B-től mért távolságait. Mutassuk meg, hogy a két összeg egyenlő.

VÁ/8. A nemzetközi kombinatorikai konferenciára érkező száz matematikust egy szállodában helyezik el, ahol a szobák egytől százig vannak megszámozva. A recepciós azt tervezi, hogy a matematikusokat érkezésük sorrendjében az adott sorszámú szobába küldi. Az elsőnek érkező vendégnek viszont elfelejti a megfelelő utasítást megadni, így ő a szobák közül véletlenszerűen választ egyet. Végül a recepciós a többieknek azt az utasítást adja, hogy az érkezési sorszámuknak megfelelő szobát egyesével foglalják el; illetve ha az már foglalt, akkor válasszanak a szabad szobák közül egyet tetszés szerint. Hányféleképpen költözhettek be a szobákba a vendégek?

3. Láma Lemma

3.1. Gábriel Tamás

GT/1. Egy szabályos nyolcszöget véges sok, átfedés nélküli paralelogrammára felosztunk. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogrammák között van téglalap.

GT/2. Mutassuk meg, hogy egy háromszög oldalaira, a hozzáírt körök érintési pontjaiban állított merőlegesek egy ponton mennek át.

GT/3. Mutassuk meg, hogy ha a, b és c valamely egységnyi kerületű háromszög oldalai, akkor

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$$

GT/4. Legyenek a, b, c, d egészek, amelyekre $a > b > c > d > 0$. Tegyük fel, hogy

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Bizonyítsuk be, hogy $ab + cd$ nem prímszám.

GT/5. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvényre

$$f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2} f(x)$$

minden valós x-re teljesül, akkor a függvény periodikus.

GT/6. Legyen n pozitív egész szám, és legyenek $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ olyan páronként különböző egész számok az $1, \ldots, n$ halmazból, hogy az $i = 1, \ldots, k-1$ értékek mindegyikére teljesül az, hogy n osztója $a_i(a_{i+1} - 1)$-nek. Bizonyítsuk be, hogy n nem osztója $a_k(a_1 - 1)$-nek.

GT/7. Két játékos előtt egy-egy kavicskupac található, kezdetben mindkettőben k kavics van. Először az első játékos ezekhez hozzátesz összesen 2008 újabb kavicsot, az új kavicsokat tetszőlegesen oszthatja el a két kupac között (akár az összeset is az egyik kupacba teheti). Ezután a második játékos tesz hozzá a kupacokhoz összesen 2008 újabb kavicsot, és ugyanígy folytatják felváltva. Az nyer, akinek a kupacában (a saját vagy ellenfele lépése után) a kavicsok száma négyzetszám, míg ellenfele kupacára ez nem igaz (ha mindkét kupac ilyen, akkor a játékot folytatják). Van-e végtelen sok k-ra a második játékosnak nyerő stratégiája?

GT/8. Egy racionális számokból álló halmaz tartalmazza minden elemének kétszeresét és bármely két elemének összegét. A halmaz elemei között van pozitív és negatív is. Bizonyítsuk be, hogy a halmaz bármely két elemének különbsége a halmazhoz tartozik.

3.2. Mezey Dorottya

MD/1. Adott egy 2011 csúcsú konvex sokszög úgy, hogy semelyik négy csúcs sem esik egy körre. A csúcsokból kiválasztható pontháramasokra megrajzoljuk a rájuk illeszkedő kört. Egy ilyen kör sovány, ha a sokszögnek van olyan csúcsa, amely kívül van a körön, ellenkező esetben a kör kövér. Sovány vagy kövér körből van több?

MD/2. Van 2012 külsőre teljesen egyforma, de páronként különböző értékű érménk. Ugyancsak van egy készülékünk, amelybe 21 érmét kell behelyezni, és megadja, hogy a 21 behelyezett érme közül melyik a k-adik legértékesebb. Ennek a készüléknek a segítségével a 2012 érme közül hánynak tudjuk meghatározni az érték szerinti sorszámát, ha
a) $k = 10$, illetve ha **b)** $k = 11$?

MD/3. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{2012 + \sqrt{2011 + \sqrt{2010 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}} < 46$$

MD/4. Legyen $H = 1, 2, \dots, n$. Megadható-e két, közös elem nélküli A és B halmaz, melyek uniója éppen H úgy, hogy A elemeinek összege egyenlő B elemeinek szorzatával, ha **a)** $n = 2016$; **b)** $n = 2017$?

MD/5. Aladár kiszínezett egy 9Ö9-es táblán valahány mezőt. Barátja, Béla, nem látta a táblát, de Aladár elárulta neki a kiszínezett mezők k számát. Mekkora lehet k minimális értéke, ami esetén Béla biztos lehet benne, hogy van a táblán olyan 2Ö2-es blokk, amelyből Aladár legalább 3 mezőt kiszínezett?

MD/6. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)k}{m^{k+1}} = 1$$

MD/7. Az $1, 2, \dots, 2014^{2014}$ számok közül Aladár és Boglárka felváltva törölnek le egy számot(Aladár kezd), amíg csak két szám marad. Ha a megmaradó két szám összege négyzetszám, akkor Boglárka nyer, egyébként Aladár. Kinek van nyerő stratégiája?

MD/8. Az $1, 2, \dots, n$ halmaz egy részhalmazát kicsinek nevezzük, ha üres vagy kevesebb eleme van a legkisebb eleménél. Hány kicsi részhalmaz van?

3.3. Nagy Eszter

NE/1. Rajzolható-e a Rubik-kocka minden lapjának minden egyes kis négyzetén egy-egy átló úgy, hogy egy önmagát nem metsző zárt töröttvonalhoz jussunk a kocka felszínén?

NE/2. Egy konvex poliédernek legalább 9 csúcsa van, a csúcsok koordinátái egész számok. Mutassuk meg, hogy talalható a poliéderben olyan, a csúcsoktól különböző pont, amelynek koordinátái szintén egész számok.

NE/3. Az ABCD trapéz átlói az M pontban metszik egymást. Az ABM és CDM háromszögek területe 18, illetve 50 egység. Mekkora a trapéz területe?

NE/4. Bejárható-e minden konvex poliéder alkalmasan választott élek mentén haladva úgy, hogy közben minden csúcsot pontosan egyszer érintünk és visszatérünk a kiinduló csúcsba?

NE/5. Oldjuk meg a

$$\sqrt{x} = x^2 - 3x + 1 - |x - 1|$$

egyenletet a racionalis szamok halmazán.

NE/6. Egy szabályos hatszögrácsos papírlapon a szabályos hatszög oldalai 6 cm hosszúak. A papírlapot vízszintesen helyezzük el és egy 2 cm átmérőjű kör alakú érmét célzás nélkül dobáljunk rá. (A papírlap olyan méretű, hogy az érme minden esetben teljes egészében a papírra esik.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az érme dobás után teljes egészében valamely hatszög belsejébe esik?

NE/7. Tekintsük azokat a természetes számokat, amelyek osztóinak számát megkapjuk úgy, hogy a prímtényezős felbontásukban szereplő prímszámok szorzatából kivonjuk a hatványkitevők szorzatát. Ilyen például a 25 és a 600 is. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok ilyen szám van.

NE/8. Egy állásinterjúra öt embert hívnak be, öt előre adott lehetséges időpontra. Minden jelentkező egy adatlapon megjelöl az öt időpontból kettőt. Mi a valószínűsége, hogy mindenkit meg tudnak hallgatni az egyik általa megjelölt időpontban?

3.4. Seres-Szabó Márton

SSzM/1. Véges sok pozitív szám közül egyik sem nagyobb a többi összegénél. Igazoljuk, hogy két részre oszthatjuk őket úgy, hogy bármelyik részben a számok összege legfeljebb kétszer akkora, mint a másikban.

SSzM/2. Egy (egyszerű összefüggő) gráfot nevezzünk találomra bejárhatónak, ha bárhogy járkálunk is az (egymáshoz csatlakozó) élein, ügyelve arra, hogy minden élre csak egyszer lépjünk, előbb-utóbb az összes élet bejárjuk. Adjuk meg az összes találomra bejárható gráfot!

SSzM/3. Tekintsük az $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ rekurzióval definiált Fibonacci-sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy $k < m$ (pozitív egészek) esetén $\sum_{i=k}^{m} F_i F_{i+3}$ összetett szám.

SSzM/4. Adott egy körön hat különböző pont. Kiválasztunk közülük hármat és az ezek által meghatározott háromszög magasságpontját összekötjük a másik három által meghatározott háromszög súlypontjával. Bizonyítsuk be, hogy az összes ilyen módon kapott szakasznak van közös pontja.

SSzM/5. Tegyük fel, hogy a, b, n, k pozitív egészek, n páratlan, p páratlan prímszám, és $a^n + b^n = p^k$. Igazoljuk, hogy n a p-nek nemnegatív egész kitevős hatványa.

SSzM/6. Legyenek a és b olyan valós számok, melyre a

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

egyenletnek van legalább egy valós gyöke. Az összes leghetséges (a, b) pár esetén mekkora az $a^2 + b^2$ kifejezés minimuma?

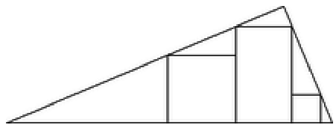
SSzM/7. Adott a síkban egy ABC hegyesszögű háromszög. Az AB átmérőjő kör a C-ből induló magasság egyenesét messe M és N-ben, míg az AC átmérőjű kör a B-ből induló magasság egyenesét P és Q-ban. Bizonyítsuk be, hogy M, N, P és Q egy körön vannak!

SSzM/8. Legyen $1 \leq r \leq n$ és vegyük az összes r elemű részhalmazát az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak. Minden részhalmaznak van egy legkisebb eleme. Bizonyítsuk be, hogy ezen legkisebb elemek számtani közepe $\dfrac{n+1}{r+1}$.

4. Mao Juice

4.1. Dánffy Ábel

DÁ/1. Egy derékszögű háromszögbe az ábra szerint egy téglalapot és két négyzetet írtunk. Mutassuk meg, hogy a téglalap magassága a négyzetek magasságának az összege.



DÁ/2. Tetszőleges n és k pozitív egészekre legyen

$$H_1 = \{1, 3, 5, \dots 2n-1\} \quad \text{és} \quad H_2 = \{0+k, 3+k, 5+k, \dots 2n-1+k\}.$$

Létezik-e minden n-hez olyan k, hogy a $H_1 \cup H_2$ halmaz összes elemének szorzata négyzetszám legyen?

DÁ/3. Adott a P pont, a k kör és a P-n átmenő AB szelő, amelyre $PA = AB = 1$. A P-ből a k-hoz húzott érintők a C és a D pontban érintik a k kört, AB és CD metszéspontja M. Mekkora a PM távolság?

DÁ/4. A $36^k - 5^l$ alakú számok közül (ahol k, l pozitív egészek) melyik a legkisebb abszolút értékű?

DÁ/5. Egy összejövetelen 31 ember vett részt. Közülük bármely 15-höz van a társaságnak egy további tagja, aki mindegyiküket ismeri. Bizonyítandó, hogy van olyan tagja a társaságnak, aki a résztvevők mindegyikét ismeri. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

DÁ/6. Egy kocka két lapja $ABCD$ és $ABEF$. Jelölje M, illetve N az AC, illetve FB lapátló egy-egy olyan pontját, amelyekre $AM = FN$. Mi az MN szakasz felezőpontjának mértani helye?

DÁ/7. Bizonyítsuk be, hogy ha $1 \le k, l < n$ egészek, akkor $\binom{n}{k}$ és $\binom{n}{l}$ nem relatív prímek.

DÁ/8. Melyek azok az $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ függvények, amelyekre

$$f(x+y) + f(x) \cdot f(y) = f(xy) + f(x) + f(y)?$$

4.2. Fey Dávid

FD/1. Legyenek a_1, a_2, a_3,...,a_n olyan pozitív egész számok amelyek mindegyike kisebb, mint 1000, de bármely kettő legkisebb többszöröse nagyobb mint 1000. Mutassuk meg hogy az a_1, a_2, a_3,...,a_n számok reciprok értékeinek összege kisebb mint 2.

FD/2. Bizonyítsuk be hogy:

$$\sin\phi + \sin(\phi+\alpha) + \sin(\phi+2\alpha) + ... + \sin(\phi+n\alpha) = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin(\phi+\frac{n\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$\text{és }\ \cos\phi + \cos(\phi+\alpha) + \cos(\phi+2\alpha) + ... + \cos(\phi+n\alpha) = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos(\phi+\frac{n\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

FD/3. Vizsgáljuk az $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$ sorozatot.
Csináljunk háromszöget ezekből úgy, hogy minden szám a jobbfenti - a balfenti.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \cdots \\
& -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{12} & & -\frac{1}{20} & & \cdots & \\
& & \frac{1}{3} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{30} & & \cdots & & \\
& & & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{20} & & \cdots & & & \\
& & & & \frac{1}{5} & & \cdots & & & &
\end{array}$$

Ezt fordítsuk el -60 fokkal (az 1 lesz felül), majd az így kapott háromszögben hagyjuk el az előjeleket, és azután minden sor minden elemét osszuk el az illető sor jobb szélén álló számmal. Ezután minden elemnek vegyük a reciprokát.
Bizonyítsuk be hogy ez a Pascal-háromszög lesz.

FD/4. Bizonyítsuk be hogy $n^2 + 5n - 1$ nem osztható 29^2-el.

FD/5. Valaki 5^5 különböző szelvénnyel lottózik. Bármely két szelvényét nézzük, van olyan szám, amely mindkét szelvényen meg van ikszelve. Bizonyítsuk be, hogy az 1-től 90-ig terjedő számok között található 4 olyan, hogy az illető mindegyik szelvényén a 4 szám közül legalább az egyik meg van ikszelve.

FD/6. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q relatív prímszámok, akkor:

$$\left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2p}{q}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{3p}{q}\right\rfloor + ... + \left\lfloor\frac{(q-1)p}{q}\right\rfloor =$$

$$= \left\lfloor\frac{q}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2q}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{3q}{p}\right\rfloor + ... + \left\lfloor\frac{(p-1)q}{p}\right\rfloor = \frac{(q-1)(p-1)}{2}$$

FD/7. Legyenek a, b, c poz. valós számok ahol $a + b + c = 1$ Bizonyítsuk be, hogy:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

FD/8. Bizonyítsuk be hogy ha a háromszög a, b, c oldalaira és szemköszti α, β, γ szögeire $a(1 - 2\cos\alpha) + b(1 - 2\cos\beta) + c(1 - 2\cos\gamma) = 0$, akkor a háromszög szabályos.

4.3. Király Regő

KR/1. Egy dobozban 2000 fehér golyó van. A doboz mellet rendelkezésünkre áll még bármennyi zöld, piros és fehér golyó. Egy lépésben ezek a cserék hajthetóak végre: két fehér egy zöldre, két piros egy zöldre, két zöld egy pirosra és fehérre, egy fehér és zöld egy pirosra vagy egy piros és zöld egy fehérre.
a) Maradhat-e három labda a dobozban úgy, hogy egyik sem zöld?
b) Maradhat-e csak egy golyó a dobozban?

KR/2. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ egy sorozat, ahol $a_1 = 43$, $a_2 = 142$ és $a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}$.
a) Bizonyítsuk, hogy a sorozat egymást követő elemei mindig relatív prímek.
b) Bizonyítsuk, hogy minden természetes m-re végtelen olyan n van, amire $a_n - 1$ és $a_{n+1} - 1$ is osztható m-mel.

KR/3. Mely prímekre létezik pozitív egész n, x, y melyre $p^n = x^3 + y^3$?

KR/4. Bizonyítsuk be, hogy végtelen olyan pozitív egész relatív prím x, y, z, t négyes létezik, amire

$$x^3 + y^3 + z^2 = t^4$$

(Nem párosával relatív prímek hanem együtt.)

KR/5. Mely $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre lesz $f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \leq 3f(x+2y+3z)$ minden $x, y, z \in \mathbb{R}$-re?

KR/6. Egy pozitív egész számot *monotonnak* nevezünk, ha semelyik számjegye sem kisebb az előzőnél. Bizonyítsuk be, hogy minden természetes n-re van egy n jegyű *monoton* négyzetszám.

KR/7. $f(n) = n!$ $\quad a = 0{,}f(1)f(2)f(3)\ldots.$ $(a = 0{,}126241207205040\ldots)$
Irracionális-e a?

4.4. Molnár-Szabó Vilmos

MSzV/1. Legyenek k_1, k_2, k_3 és k_4 körök a síkon. k_i érinti k_{i+1}-et, és $k_5 = k_1$. Bizonyítsd be, hogy a négy érintési pont húrnégyszöget alkot, vagy egy egyenesen van.

MSzV/2. Az $ABCDEF$ konvex hatszögben az AB és DE, a BC és EF, továbbá a CD és FA oldalak párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy az ACE és BDF háromszögek területe egyenlő.

MSzV/3. Egy $R = 2r$ sugarú kört r sugarú körlapokkal akarunk teljesen lefedni. Legkevesebb hány körlap kell ehhez? (a körlaphoz a kerület is hozzátartozik)

MSzV/4. Egy körlemezen 8 pontot veszünk fel (a határoló körvonal is része a lemeznek). Bizonyítsuk be, hogy a 8 pont között van két olyan, amelynek távolsága a kör sugaránál kisebb.

MSzV/5. (La Hire tétele) Adott egy k kör és egy A pont a körön kívül. Bizonyítsd be, hogy bárhogy húzunk A-n keresztül egy k-t metsző egyenest (ℓ), a két metszéspontban állított érintők metszéspontja (B), és az A-ból húzott két érintő talppontjai egy egyenesbe esnek.

MSzV/6. Tekintsünk két egymáson kívül elhelyezkedő kört, egy közös külső és egy közös belső érintőjüket. Érintési pontjaik mindkét körben egy-egy húrt határoznak meg. Bizonyítsuk be, hogy a két húr egyeneseinek metszéspontja a körközéppontokat összekötő egyenesen van.

MSzV/7. Az $ABCD$ négyzet AB oldalát az E pont felezi, a BC és a CD oldalon pedig úgy helyezkednek el az F, G pontok, hogy az AG, EF egyenesek párhuzamosak.
BBH az FG szakasz érinti a négyzetbe írható kört.

MSzV/8. n, k pozitív egészek, x valós. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left\lfloor \binom{n+1}{k+1} x \right\rfloor \geq \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor \binom{i}{k} x \right\rfloor .$$

5. Védd a fákat, egyél hódot

5.1. Farkas Iza

FI/1. Határozzuk meg a $2x^3 - y^3 = 5$ egyenlet egész megoldásait.

FI/2. Megadható-e végtelen sok különböző prímszám, melyek közül bármely 2015 összege összetett szám?

FI/3. Adott az $ABCD$ négyszög, melynek C-nél és D-nél levő szöge derékszög. Szerkesszük meg a CD szakasznak azt a P pontját, melyre APD szög egyenlő BPC szög kétszeresével!

FI/4. A hegyesszögű ABC háromszög B és C csúcsából induló magasságvonal talppontja az AC, illetve AB oldalon rendre D és E, a BC oldal felezőpontja F. Az AF és DE szakaszok metszéspontja M, az M pontnak a BC szakaszra eső merőleges vetülete N. Bizonyítsuk be, hogy az AN szakasz felezi a DE szakaszt.

FI/5. Legyen az n egész 3-nál nagyobb. Igazoljuk, hogy ha egy egész szám n alapú számrendszerbeli alakjában minden számjegy pontosan egyszer fordul elő, akkor a szám nem lehet prímszám.

FI/6. Az $ABCD$ húrnégyszögben az ADB és ACB szögek felezői az AB oldalt rendre az E és F pontokban, a CBD és CAD szögek felezői pedig a CD oldalt rendre a G és H pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az E, F, G, H pontok egy körön vannak.

FI/7. Egy bolygón háromféle nép él: az alfák, a béták és a gammák. Az egyik népbe tartozóknak 2 kezük, a másik népbe tartozóknak 3 kezük, a harmadik népbe tartozóknak pedig 4 kezük van. Az egyik népnél egy-egy kézen 4 ujj van, a másik népnél 5 ujj, a harmadiknál 6 ujj van egy-egy kézen. Mindegyik nép olyan alapú számrendszert használ, ahány kézujja van. Az alfák saját számrendszerében felírt 64_α száma megegyezik a béták 51_β számával. Hány keze, és azon hány ujja van az alfáknak, a bétáknak, illetve a gammáknak?

FI/8. Mely négyzetszámok állnak elő egy 3-, és egy 5-hatvány összegeként, ahol a hatványok kitevői nemnegatív egész számok?

5.2. Galambos Ábel

GÁ/1. Egy 10×14-as sakktáblára teszünk néhány korongot, úgy, hogy minden sorban és oszlopban páratlan sok korong legyen.
BBH: Öszesen páros sok korong van a fekete mezőkön!

GÁ/2. Az r és s pozitív egészekről tudjuk, hogy bármely k pozitív egészre ks-nek legalább annyi osztója van, mint kr-nek. Lássuk be, hogy r osztója s-nek!

GÁ/3. BBH: $1 > 0$

GÁ/4. Adott egy $\alpha = \frac{180°}{n}$ szög, ahol 3 nem osztja n-et.
BBH: α harmadolható euklideszi módszerekkel.

GÁ/5. Egy nehéz 2 részes matekversenyen összesen 28 feladat volt. Minden versenyző pontosan 7 fealdatot oldott meg, és bármely 2 feladatra pontosan 2 diák volt aki mindkettőt megoldotta.
BBH: Volt egy személy aki vagy egy feladatot se oldott meg, vagy legalább 4et az első részben.

GÁ/6. Találjuk meg az összes valós együtthatós polinomot, amelyre:

$$P(P(x)) = (x^2 + x + 1) \cdot P(x)$$

ahol x valós.

GÁ/7. a) Van-e 14 egymást követő pozitív szám, amire mindegyik osztható legalább egy prímmel 2 és 11 között (inkluzív)?
a) Van-e 21 egymást követő pozitív szám, amire mindegyik osztható legalább egy prímmel 2 és 13 között (inkluzív)?

GÁ/8. Legyenek $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ pozitív nem szomszédos egészek, és legyen $s_m = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$.
BBH: minden pozitív egész n-re az $[s_n, s_{n+1})$ intervallum legalább egy eleme négyzetszám.

5.3. Móricz Réka

MR/1. Legfeljebb hány olyan, egy pontból induló félegyenes adható meg a térben, amelyek közül bármelyik kettő tompaszöget zár be egymással?

MR/2. Egy 5 cm élhosszúságú kocka alakú sajt közepén ül Pacworm, a sajtkukac. A sajtot úgy rágja meg, hogy mindig egyszerre 1 cm-t halad valamelyik éllel párhuzamosan, majd irányt vált figyelve arra, hogy amikor elindul az új irányba, akkor több mint 1 cm vastagságú érintetlen sajtréteg legyen előtte. Feltéve, hogy mind elindulásnál, mind irányváltásnál a sajtkukac a lehetséges irányok közül ugyanakkora valószínűséggel választ ki egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy 5 cm megtétele után valamelyik éltől legfeljebb 0,8 cm távolságra lesz?

MR/3. Bontsunk fel egy kört egybevágó síkidomokra úgy, hogy legalább az egyik darab ne tartalmazza a kör középpontját, még a határán sem.

MR/4. Egy iskolai sakkversenyen mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Minden játékos ugyanannyi pontot szerzett a lányok ellen, mint a fiúk ellen. Bizonyítsuk be, hogy a résztvevők száma négyzetszám. (Győzelemért 1; döntetlenért 0,5; vereségért 0 pont jár.)

MR/5. Felvágunk egy szakaszt 3 részre. (A vágások helye teljesen random, és azok egymástól függetlenek.) Mennyi az esélye, hogy a keletkezett 3 szakasz segítségével,(azok mozgatásávall) alkotható belőlük egy háromszög?

MR/6. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a^3b}{(3a+b)^p}+\frac{b^3c}{(3b+c)^p}+\frac{c^3a}{(3c+a)^p}\geq\frac{a^2bc}{(2a+b+c)^p}+\frac{b^2ca}{(2b+c+a)^p}+\frac{c^2ab}{(2c+a+b)^p}$$

teljesül tetszőleges a, b, c, p pozitív számok esetén.

MR/7. Az ABC háromszög köré írt körét az A-ból, B-ből és C-ből induló belső szögfelezők rendre a D, E és F pontokban metszik. A DEF és ABC háromszögek oldalainak metszéspontjai az A-tól B irányába elindulva rendre G, H, I, J, K és L. Mutassuk meg, hogy a DGL, EHI és FKJ háromszögek egymáshoz hasonlók.

MR/8. Egy asztalon 99 pálca van, a hosszuk $1, 2, 3, \ldots, 99$ egység. Andrea és Béla a következő játékot játsszák: felváltva elvesznek egy-egy általuk választott pálcát; a játékot Andrea kezdi. A játéknak akkor van vége, amikor pontosan három pálca marad az asztalon. Ha a megmaradó három pálcából összeállítható egy háromszög, akkor Andrea nyer, különben Béla. Kinek van nyerő stratégiája?

5.4. Tot Bagi Márton

TBM/1. Milyen alapú számrendszer esetén létezik olyan 1-nél nagyobb pozitív egész, amely megegyezik a számjegyei összegének a négyzetével?

TBM/2. Aladár és Béla a 81 lapos pakliból felváltva kiválasztanak egy-egy SET kártyát és leteszik az asztalra. Az veszít, aki után az asztalon szereplő kártyák között először lesz SET. Aladár kezd. Kinek van nyerő stratégiája?

TBM/3. Ikozapolisz városában az úthálózat gráfja egy ikozaéder élhálózatának gráfjával egyezik meg. Jorgosz szállása az ikozaéder egyik csúcsában található, míg kedvenc színháza az ezzel szemközti csúcsban. Sötétedés után a színházból hazafelé menet minden egyes csúcsban p annak a valószínűsége, hogy találkozik valakivel, aki mutat neki egy olyan irányt, amerre elindulva a legkevesebb élen haladva a szállására juthat. Ellenkező esetben véletlenszerűen halad tovább úgy, hogy egyik irány sincs kitüntetve, vagyis előfordulhat akár az is, hogy visszafordul. Mekkora p érték esetén lesz 50% annak a valószínűsége, hogy előbb ér a szállásra, minthogy a színházba visszatalálna?

TBM/4. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számot, amely relatív prím az $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 (n \geq 1)$ sorozat összes tagjával.

TBM/5. A számítógép képernyőjén egy 98×98-as sakktábla látható, a szokásos módon színezve. Az egér segítségével kijelölhetünk tetszőleges olyan téglalapot, amelyet a sakktábla vonalai határolnak, majd rákattintva az ebben a téglalapban lévő mezők színe ellenkezőjére változik. Minimálisan hány kattintás szükséges ahhoz, hogy a sakktábla teljesen egyszínű legyen?

TBM/6. Xavér és Yvett felváltva mondanak **a)** valós számokat; **b)** komplex számokat. Xavér kezd, és a játék a 100. szám kimondása után ér véget. Yvett célja az, hogy a kimondott $a_1, \ldots, a_{100}$ számokból képzett összesen $\binom{100}{2}$ darab kettős szorzat $a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{99}a_{100}$ összege 0 legyen, Xavér ezt szeretné megakadályozni. Kinek van nyerő stratégiája?

TBM/7. Egy $ABCD$ húrnégyszög köré írt kör k, az ABC háromszög beírt körének középpontja P, az ABD háromszögé pedig Q. Legyen a k kör BC ívének felezőpontja E, a DA ívének felezőpontja pedig F. Mutassuk meg, hogy PQ párhuzamos EF-fel.

TBM/8. Egy permutációját az $1, 2, \ldots, m$ számoknak *friss*nek hívunk, ha nincs olyan $k < m$ szám úgy, hogy a permutáció első k száma az $1, 2, \ldots, k$ számok valamilyen sorrendben. Legyen f_m az $1, 2, ...m$ számok friss permutációinak a száma.
Lássuk be, hogy $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ teljesül minden $n \geq 3$-ra.

6. A vaddisznók szőrösek

6.1. Kun Ágoston

KÁ/1. Egy nyolcszög oldalainak felezőpontjai közül hét adott. Szerkesszük meg a nyolcadikat!

KÁ/2. Legyen m, n pozitív egész és $0 \leq x \leq 1$. Igazoljuk, hogy

$$(1-x^n)^m + (1-(1-x)^m)^n \geq 1.$$

KÁ/3. Legyen $a_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$, ahol n pozitív egész számot jelent.
Bizonyítsd be, hogy van olyan k pozitív egész szám, amelyre a $P_k = a_2 \cdot a_3 \cdot, \ldots \cdot a_k$ szorzat értéke nagyobb 1000-nél! Melyik a legkisebb ilyen k szám?

KÁ/4. Egy szabályos $2n$-szög n csúcsát pirosra, a többi csúcsát kékre színeztük. Nagyság szerint sorbarendezzük az összes piros pontpár távolságát, és nagyság szerint sorbarendezzük az összes kék pontpár távolságát is. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott két, $\binom{n}{2}$ hosszúságú számsorozat ugyanaz.

KÁ/5. $a_1, a_2, ..., a_{3n}$ $(n \geq 1)$ természetes számok.
Bizonyítsuk be, hogy az $a_i - a_j$ $(1 \leq i < j \leq 3n)$ különbségek közül legfeljebb $3n^2$ olyan lehet, amely nem osztható 3-mal.

KÁ/6. Számítsuk ki $\binom{2002}{0} - \binom{2001}{1} + \binom{2000}{2} - \ldots - \binom{1001}{1001}$ értékét.

KÁ/7. Egy gömbi térképen a határok minden pontja 2 vagy 3 országhoz tartozik. Azokat a határpontokat, amelyek három országhoz tartoznak, csúcspontnak nevezzük. A határnak két különböző csúcs közé eső, csúcsot nem tartalmazó szakaszát élnek nevezzük. Két ország szomszédos, ha van közös határpontjuk. A térképet úgy színezték ki piros, sárga, kék és zöld színekkel, hogy szomszédos országok különböző színűek.

Igazoljuk, hogy páros azoknak a piros és kék színű országoknak az együttes száma, amelyek határán páratlan sok csúcs van.

KÁ/8. Van egy zsebrádiónk, amely két ceruzaelemmel működik A fiókban van 8 ceruzaelemünk, közülük 4 ki van merülve. A jó és a rossz elemek sajnos összekeveredtek. Az elemek tesztelésére nincs más lehetőségünk, mint hogy belehelyezzünk kettő a rádióba, és ha szól, akkor mindkét elem jó, ha nem szó, akkor lealább az egyik rossz. Legalább hány kísérletre van szükség ahhoz, hogy biztosan megszólaljon a rádió?

6.2. Nyárfádi Patrik

NyP/1. Aladár és Benedek egységnyi oldalú szabályos háromszögekből összerakott egy n oldalú szabályos háromszöget. Az így kapott táblán a következő játékot játsszák: Felváltva kiszíneznek egy-egy csúcspontot a piros, kék és zöld színek valamelyikével mindaddig, amíg az összes csúcs, beleértve a nagy háromszög oldalain és belsejében levő pontokat is, ki lesz színezve. Minden olyan egységnyi oldalú háromszögért, amelynek csúcsai piros-kék-zöld színűek pozitív körüljárás szerint, az első lépést megtevő Aladár kap egy pontot. Azokért a háromszögekért, amelyeknek csúcsai piros-kék-zöld színűek negatív körüljárás szerint, Benedek kap egy-egy pontot. Az nyer, aki több pontot szerez.

Kinek van nyerő stratégiája?

NyP/2. Milyen $n > 2$ egészekre igaz a következő állítás? „Bármely konvex n-szögnek van olyan oldala, amelyen lévő két szög egyike sem hegyesszög."

NyP/3. Ősi hagyományai szerint a Fejszámolók törzse az éveknek a szerencsés, illetve a baljós besorolást adja. Például 2013 szerencsés év, mert az első 2013 pozitív egészet be lehet sorolni legalább két csoportba úgy, hogy bármely két csoportban lévő számok összege és darabszáma is egyenlő. Ha ez nem lehetséges, akkor az év a baljós jelzőt kapja. Melyek a baljós évek?

NyP/4. Mi az n egész szám legnagyobb értéke, ha négy megfelelő segédsúly és egy kétkarú mérleg segítségével minden olyan test tömege meghatározható, amelyről tudjuk, hogy kilogrammban vett mérőszáma 1-től az n-ig terjedő egész szám?
(A kétkarú mérleggel tetszőlegesen sok mérést végezhetünk, de csak a segédsúlyokat és a mérendő tárgyat rakhatjuk serpenyőibe, és sem a segédsúlyokat, sem pedig a mérendő tárgyakat nem darabolhatjuk fel.)

NyP/5. Milyen k pozitív egész szám esetén lehet az első k darab prímszám szorzata két pozitív köbszám összege?

NyP/6. Az A, B és C betűk felhasználásával szavakat (véges hosszúságú betűsorozatokat) készítünk. Egy szóval a következő műveleteket végezhetjük:

(a) A szóban kiválasztunk néhány egymás utáni betűt - esetleg csak egyetlen egyet, vagy akár a teljes szót -, és „megduplázzuk", például $B\underline{BCA}C \to BBCABCAC$.

(b) Az (a) lépés visszafelé: Ha valahol a szóban két egymás utáni részlet megegyezik, akkor az egyiket elhagyjuk: $\underline{ABCABC} \to BCABCBC$.

Igazoljuk, hogy ilyen lépések sorozatával bármelyik szóból eljuthatunk egy legfeljebb 8-betűs szóhoz.

NyP/7. András gondolt egy 16-nál nem nagyobb pozitív egészre. Béla feltehet 7 eldöntendő kérdést, amelyre András igennel vagy nemmel válaszolhat, és egyszer rossz választ is adhat. Segítsünk Bélának kitalálni a gondolt számot.

NyP/8. A 12.c osztályba ugyanannyi fiú jár, mint lány, így a szalagavatón mindenkinek lesz az osztályból táncpartnere. A párok összeállításához minden fiú rangsorolja az összes lányt, és fordítva.
Mutassuk meg, hogy párba állíthatók úgy, hogy ne legyen olyan fiú és lány, akik mindketten szívesebben táncoltak volna egymással, mint a nekik jutó partnerrel.

6.3. Réti Zoltán

RZ/1. A k_1 és a k_2 körök az A és a B pontokban metszik egymást, egyik közös érintőjük pedig az E_1, illetve az E_2 pontokban érinti a köröket. Bizonyítsuk be, hogy az A, E_1, E_2, illetve a B, E_1, E_2 pontokon átmenő körök sugara egyenlő.

RZ/2. Minden pozitív egész n esetén jelölje a_n azt, hogy n hányféleképpen állítható elő az 1, 3, 4 számok valahány példányának összegeként, ha a tagok sorrendje is számít. Igazoljuk, hogy $a_{2020}a_{2021}a_{2022}$ köbszám.

RZ/3. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitív számokra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\left(\frac{a_1}{a_2+\ldots+a_n}\right)^2+\left(\frac{a_2}{a_3+\ldots+a_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_1+\ldots+a_{n-1}}\right)^2\geq\frac{n}{(n-1)^2}.$$

RZ/4. A 20×20-as sakktábla néhány mezőjén bábu áll. Egy bábut akkor vehetünk le a tábláról, ha annak sorában vagy oszlopában a mezőknek legalább a fele üres. Legfeljebb hány bábu lehet a táblán, ha ilyen lépések sorozatával az összeset le tudjuk venni?

RZ/5. Egy papírlapra felírtuk a számokat 1-től 2009-ig. A második lépésben mindegyik szám kétszeresét is felírtuk a papírra, majd kiradíroztuk azokat a számokat, amelyek kétszer is szerepeltek. Ezt a lépést ismételgetjük olyan módon, hogy az i-edik lépésben a papíron éppen látható számok mindegyikének i-szeresét is felírjuk a papírra, majd kiradírozzuk azokat a számokat, amelyek kétszer is szerepelnek. Bizonyítsuk be, hogy a papírlapon minden lépés után legalább 2009 szám lesz.

RZ/6. Egy 13×13-as táblázat mezőibe úgy írtak számokat, hogy a 13 sorban és a 13 oszlopban ugyanannyi a számok összege. Legalább hány számot kell a táblázatban ahhoz megváltoztatni, hogy a 26 darab összeg között ne legyenek egyenlők?

RZ/7. Egy 28-elemű halmazból 4-elemű részhalmazokat akarunk kiválasztani a következő tulajdonságokkal:
a) Bármelyik két kiválasztott négyesnek legfeljebb két közös eleme legyen;
b) Ha x egy tetszőleges elem és A egy olyan négyes, amely nem tartalmazza x-et, akkor létezzen legalább egy olyan B négyes is, amely az x-et tartalmazza, és A-val pontosan két közös eleme van.
Lehetséges-e ilyen négyeseket kiválasztani?

RZ/8. Az ABC hegyesszögű háromszögben $BAC\angle = \alpha$. A D pont a háromszög belsejében, a BAC szög felezőjén, a E pont az AB oldalon, az F pont pedig a BC oldalon helyezkedik el úgy, hogy $BDC\angle = 2\alpha$, $AED\angle = 90° + \frac{\alpha}{2}$, és $BEF\angle = EBD\angle$. Határozzuk meg a $BF : FC$ arányt.

6.4. Rubint Gergő

RG/1. Egy körlemezen 8 pontot veszünk fel (a határoló körvonalat is a körlemezhez számítjuk). Bizonyítsuk be, hogy a 8 pont között van két olyan, amelynek távolsága a kör sugaránál kisebb.

RG/2. Egy egész számokból álló halmaz tartalmazza minden elemének kétszeresét és bármely két elemének összegét. A halmaz elemei között van pozitív és negatív is. Bizonyítsuk be, hogy a halmaz bármely két elemének különbsége a halmazhoz tartozik.

RG/3. Három játékos: A, B és C a következő játékot játssza: három kártya mindegyikére egy-egy egész szám van írva. Erre a három számra (p, q és r) fennáll, hogy $0 < p < q < r$. A kártyákat összekeverik, majd szétosztják úgy, hogy minden játékos kapjon egyet. Ezután a játékosoknak annyi golyót adnak, amennyit kártyájuk mutat. Utána összeszedik a kártyákat, a kapott golyók azonban a játékosoknál maradnak. Ezt a játékot (a kártyák összekeverése és szétosztása, a golyók odaadása, a kártyák összeszedése) legalább kétszer játsszák végig. Az utolsó játszma után A-nak 20, B-nek 10, míg C-nek 9 golyója van. Ezenkívül B azt is tudja, hogy utolsó alkalommal ő r darab golyót kapott. Kinek jutott először q darab golyó?

RG/4. Egy 8×8 mezőből álló sakktáblát úgy vágunk szét p darab téglalapra, hogy egyetlen mezőt sem vágunk ketté. Mindegyik ilyen szétvágásnak ki kell elégítenie a következő feltételeket:
(1) Minden egyes téglalapnak ugyanannyi fehér mezőt kell tartalmaznia, mint feketét.
(2) Ha a_i jelöli az i-edik téglalapban levő fehér mezők számlát, akkor fenn kell állania az $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ egyenlőtlenségsorozatnak.
Keressük meg p-nek azt a legnagyobb értékét, amelyre létezik ilyen szétvágás. Továbbá állítsuk elő p-nek ehhez az értékéhez tartozó valamennyi $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sorozatot.

RG/5. Egy n oldalú „dobókockát” addig dobálunk, amíg mind az n lehetséges eredményt legalább egyszer megkapjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

RG/6. Adott 2006 pont a síkon. Legfeljebb hány olyan pont lehet köztük, amely bármely másik két ponttal hegyesszögű háromszöget határoz meg?

RG/7. Egy kör alakú városfalon 12 őr teljesít szolgálatot. Délben mindegyikük elindul az őrhelyéről a falon valamelyik irányba olyan sebességgel, amellyel egy óra alatt kerülné meg a várost. Ha két őr szembetalálkozik, akkor sarkon fordulnak és változatlan sebességgel haladnak tovább az ellenkező irányba. Bizonyítsuk be, hogy pontban éjfélkor minden egyes őr a saját őrhelyén lesz.

RG/8. Adott négy pozitív szám: a, b, c, d. Az ab, ac, ad, bc, bd, cd szorzatok közül ötnek az értékét ismerjük, ezek $2, 3, 4, 5$ és 6. Mennyi a hatodik szorzat értéke?

7. That's hard

7.1. Bán-Szabó Áron

BSzÁ/1. Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok, míg $\mathbb{N}$ a természetes számok halmazát (a 0 beleszámít). Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ függvényt, melyre minden k egész szám esetén teljesül, hogy $f(k+3) = \dfrac{f(k) + 2f(k+1) + 3f(k+2)}{6}$.

BSzÁ/2. Jelölje $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmazát. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, melyre tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^+$ számok esetén teljesül, hogy

$$f^2(x) \geq f(x+y)(f(x)+y).$$

BSzÁ/3. Egy újféle torpedószerű játékot egy $m \times n$-es táblán kell játszani, ahol m, n pozitív egészeket jelölnek. Három különböző hajó létezik, melyek méretei rendre 2×3, 3×5, 7×8. Mindhárom hajóból tetszőlegesen sokkal rendelkezünk. A táblára úgy helyezhető el egy hajó, ha (i) nem lóg le a tábláról; (ii) a tábla „rácsvonalaira” illeszkednek az oldalai, azaz egy hajó csak teljes egységnégyzeteket foglal el; (iii) nem érintkezik semelyik másik hajóval, illetve nem érintkezik a tábla szélével.
Célunk az, hogy úgy helyezzünk le hajókat a táblánkra, hogy ne maradjon négy üres, lefedetlen mező a táblán, melyek egy 2×2-es négyzetet alkotnak. Milyen m, n-ekre lehetséges ez? (*Megjegyzés:* A hajók $90°$-al elforgathatóak.)

BSzÁ/4. Bergengócia 10 városát kétféle busztársaság uralja. Bármely két várost pontosan az egyik társaság (oda-vissza) buszjárata köti össze. Mutassuk meg, hogy valamelyik busztársaságnak van két olyan körútja, melyek diszjunktak, továbbá páratlan sok (de egynél több) várost érintenek (külön-külön).

BSzÁ/5. A T transzformáció minden (nem degenerált) háromszöghöz egy (pozitív véges sugarú) kört rendel hozzá. A transzformációra teljesül, hogy

i) ha σ egy hasonlósági transzformáció és $\sigma : \triangle_1 \to \triangle_2$, akkor $\sigma : T(\triangle_1) \to T(\triangle_2)$;

ii) ha A, B, C, D négy általános helyzetű pont a síkon (azaz semelyik három nincs egy egyenesen), akkor a $T(ABC), T(BCD), T(CDA), T(DAB)$ köröknek van közös pontjuk.

Bizonyítsuk be, hogy T minden háromszöghöz a Feuerbach-körét rendeli hozzá!

BSzÁ/6. Az ABC háromszögben legyen ω a beírt kör és M a BC oldal felezőpontja. ω a BC egyenest T-ben érinti és az AT egyenes ω-t S-ben metszi el másodszorra. Bizonyítsuk be, hogy az ω-hoz S-ben húzott érintő, az AM egyenes és a BC egyenes által meghatározott háromszög beírt köre érinti az ABC háromszög körülírt körét.

BSzÁ/7. Az a, b pozitív egészekre teljesül, hogy az $a^2 + b^2 + 1$ számot elosztva ab-vel egész számot kapunk. Határozzuk meg, hogy mi a hányados!

BSzÁ/8. Legyen n egy pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy ha a $3^n - 2^n$ szám egy prímhatvány, akkor n prímszám!

7.2. Fleiner Zsigmond

FZs/1. Adott p prím és $1 \leq k < p - 1$. Bizonyítsd be, hogy

$$p \mid \sum_{i=0}^{p-1} i^k$$

FZs/2. Bonts fel egy kört véges sok egybevágó részre úgy, hogy ne tartalmazza mindegyik a középpontot.

FZs/3. Megadható-e S végtelen részhalmaza a pozitív egészeknek úgy, hogy S bármely véges részhalmazában az elemek összege ne legyen teljes hatvány.

FZs/4. Legyenek $A, B \subset \mathbb{N}$ véges halmazok. Jelölje $A + B$ azt a halmazt, aminek pontosan azok az elemei, amit megkaphatunk egy A beli és egy B beli szám összegeként. Jelölje $c \times A$ azt a halmazt, aminek az elemei az A halmaz c-szeresei.
Bizonyítsuk, hogy $|A + 2 \times A| \geq 3|A| - 2$.

FZs/5. Fedjünk le egy $2n \times 2n$-es (színezett) sakktáblát 1×2-es dominókkal. A horizontális dominók között különbséget teszünk az alapján, hogy a dominó bal oldala fekete vagy fehér mezőn van. Bizonyítsuk, hogy a két különböző fajta horizontális dominóból mindig ugyanannyi van. (Hasonlóan a vertikális dominók is.)

FZs/6. Bizonyítsuk, hogy egy konvex 5-szögnek megadható úgy 3 átlója úgy, hogy azok háromszöget alkossanak.

FZs/7. Létezik-e olyan részhalmaza a pozitív számoknak, hogy minden végtelen számtani sorozatnak van a halmazon belül és kívül is eleme?

FZs/8. Van egy bűvész és van neki egy segédje. A bűvésznek van egy pakli kártyája. A trükk a következő: egy ember húz 5 kártyát a bűvész paklijából, majd a bűvész segédje ebből valamilyen sorrendben visszaad 4-et. Ezek után a bűvész megmondja az 5. kártyát. Megvalósítható-e a trükk?

7.3. Kovács Tamás

KT/1. Jelölje $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát. Határozzuk meg azon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényeket, melyekre

$$f^3(1) + f^3(2) + \cdots + f^3(n) = (f(1) + f(2) + \cdots + f(n))^2$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ számra.

KT/2. Az a, b, c pozitív valósakra lássuk be, hogy

$$\sqrt{a^2 + ac + c^2} \leqslant \sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2}.$$

KT/3. Legyenek n és k pozitív egészek, amelyekre $k \geqslant n$ és $k - n$ páros szám. Adott $2n$ lámpa, melyek 1-től $2n$-ig vannak számozva, melyek mindegyike *be*(kapcsolt) vagy *ki*(kapcsolt) állapotban lehet. Kezdetben mindegyik lámpa ki állapotban van. *Lépések* egy sorozatát tekintjük: egy lépés abból áll, hogy valamelyik lámpa állapotát megváltoztatjuk.
Legyen N az olyan k lépésből álló sorozatok száma, melyek eredményeképpen az 1-től n-ig számozott lámpák bekapcsolt, az $(n + 1)$-től $2n$-ig számozott lámpák pedig kikapcsolt állapotban lesznek.
Legyen M az olyan k lépésből álló sorozatok száma, melyek eredményeképpen az 1-től n-ig számozott lámpák bekapcsolt, az $(n + 1)$-től $2n$-ig számozott lámpák pedig kikapcsolt állapotban lesznek és a sorozatban az $n + 1$-től $2n$-ig számozott lámpák semelyikét sem kapcsoljuk be semmikor.
Határozzuk meg az N/M hányados értékét!

KT/4. Tegyük fel, hogy $s_1, s_2, s_3, \ldots$ pozitív egész számoknak olyan szigorúan növekvő sorozata, amelyre

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{és} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

részsorozatok mindegyike számtani sorozat. Bizonyítsuk be, hogy az $s_1, s_2, s_3, \ldots$ maga is számtani sorozat.

KT/5. Adott a síkon 2018 pont úgy, hogy a pontok közötti távolságok mind különbözőek. Minden pontra jelöljük meg a hozzá legközelebbi pontot. Legkevesebb hány pontot jelölhettünk meg?

KT/6. Jelölje $\mathbb{N}$ a pozitív egészek, míg $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Határozzuk meg azon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyekre $f(1) = 1$ és minden $n \in \mathbb{N}$-re teljesül, hogy

$$\sum_{d|n} f(d) = n.$$

KT/7. Igazoljuk, hogy minden N valós számra az

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2$$

egyenletnek van olyan megoldása az egész számok körében, melyre x_1, x_2, x_3, x_4 mind nagyobb N-nél.

KT/8. Legyen $a > b > 1$ két pozitív egész, ahol b páratlan. Tegyük fel, hogy az n pozitív egészre teljesül, hogy $b^n \mid a^n - 1$. Mutassuk meg, hogy $a^b > \frac{3^n}{n}$.

8. A Jó, a Rossz és a Csúf

8.1. Baski Bence

BB/1. Egy asztalon 98 pálca van, a hosszuk $1, 2, 3, \ldots, 98$ egység. Andrea és Béla a következő játékot játsszák: felváltva elvesznek egy-egy általuk választott pálcát; a játékot Andrea kezdi. A játéknak akkor van vége, amikor pontosan három pálca marad az asztalon. Ha a megmaradó három pálcából összeállítható egy háromszög, akkor Andrea nyer, különben Béla. Kinek van nyerő stratégiája?

BB/2. Van-e olyan pozitív egész, ami teljes hatvány, és a tízes számrendszerbeli alakjában minden számjegy 0 vagy 6?

BB/3. Egy 5 cm élhosszúságú kocka alakú sajt közepén ül Pacworm, a sajtkukac. A sajtot úgy rágja meg, hogy mindig egyszerre 1 cm-t halad valamelyik éllel párhuzamosan, majd irányt vált figyelve arra, hogy amikor elindul az új irányba, akkor több mint 1 cm vastagságú érintetlen sajtréteg legyen előtte. (Azaz, nem fordulhat olyan irányba, amerre előtte már ki van vájva a sajt, vagy amerre ha tovább menne 1 cm-t, kijutna a sajtból.) Feltéve, hogy mind elindulásnál, mind irányváltásnál a sajtkukac a lehetséges irányok közül ugyanakkora valószínűséggel választ ki egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy 5 cm megtétele után valamelyik éltől legfeljebb $0,8$ cm távolságra lesz?

BB/4. Egy egyetemről 9 matematikus együtt vett részt egy konferencián. Mivel az előadások unalmasak voltak, többször is elaludtak, mindegyikük legfeljebb 4 alkalommal. Bármelyik két matematikus esetén előfordult, hogy egyszerre aludtak. Mutassuk meg, hogy volt olyan időpont, amikor legalább hárman aludtak.

BB/5. Legyen $ABCD$ konvex négyszög. Az ABC háromszögben legyen I és J a beírt kör, illetve az A csúccsal szemközti hozzáírt kör középpontja. Az ACD háromszögben legyen K, illetve L a beírt, illetve az A csúccsal szemközti hozzáírt kör középpontja. Biz. be, hogy az IL és JK egyenesek, ill. a BCD szög felezője egy ponton mennek át.

BB/6. Add meg az összes olyan (x, y) poz. egész számpárt, amelyre: $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$.

BB/7. Keressük meg az összes olyan pozitív egész n-t, amelyre az $S = 1, 2, , 3, ..., n$ halmazban minden számot kékre vagy pirosra színezünk úgy, hogy az $S\times S\times S$ halmaznak pontosan 2007 darab olyan rendezett (x, y, z) eleme legyen, ahol x, y, z egyszínűek és $n \mid x + y + z$.

BB/8. Az a, b, c, d pozitív valós számokra $abcd = 1$ és $a + b + c + d > \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{a}$. Bizonyítsuk, hogy: $a + b + c + d < \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{d}{c} + \dfrac{a}{d}$.

8.2. Bencsik Ádám

BÁ/1. Az a, b, c valós számok szorzata 1. Igazoljuk, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$.

BÁ/2. Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyekre minden valós x esetén

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

BÁ/3. Határozzuk meg azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyekre

$$f(x^2 + f(y)) = f(f(x)) + f(y^2) + 2f(xy)$$

teljesül minden x, y valós számpárra.

BÁ/4. Adott egy 2^{100} sorral és 100 oszloppal rendelkező táblázat. Alíz és Éva felváltva töltik ki az első sor mezőit, Alízzal kezdve. Alíz minden lépésében választ egy üres mezőt és egy **X**-et ír, míg Éva mindig egy üres mezőbe egy **0**-t ír bele. Miután megtelt az első sor, átmennek a második sorra és ugyanezt csinálják (ismét Alíz kezd). Így haladnak, amíg meg nem telik a táblázat. Alíz célja, hogy minél több féle sor készüljön a táblázatban, viszont Éva célja, hogy minél kevesebb féle sor szülessen. Hány darab különböző sorból fog állni a táblázat, ha mindketten a lehető legjobb stratégiát követik?

BÁ/5. A $P_1, P_2, \ldots, P_n$ különböző pontok sorozatát *jónak* nevezzük, ha semelyik három nincs egy egyenesen, a $P_1P_2 \ldots P_n$ töröttvonal nem metszi önmagát és a $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ háromszög körüljárása az óra járásával ellentétes minden $1 \leqslant i \leqslant n-2$-re.
Minden $n \geqslant 3$ egészre határozzuk meg a legngyobb olyan k egészet, melyre létezik n pont a síkon, $A_1, A_2, \ldots A_n$ úgy, hogy van k darab olyan $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ permutáció, melyre $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ jó.

BÁ/6. Az ABC háromszög kerülete 4. Az X, Y pontok rendre az AB, AC félegyeneseken helyezkednek el úgy, hogy $AX = AY = 1$ teljesül. A BC, XY szakaszok az M pontban találkoznak. Igazoljuk, hogy vagy az ABM vagy az ACM háromszög kerülete 2.

BÁ/7. Az $ADBE$ négyszög csúcsai az AB átmérőjű körön helyezkednek el. Az AB, DE átlók C-ben metszik egymást. Jelölje γ a (BOD) kört, ahol O az AB szakasz felezőpontja. Az $F \in \gamma$ pontra teljesül, hogy OF átmérője γ-nak. Az FC egyenes γ-t G-ben metszi másodszorra. Igazoljuk, hogy az A, O, G, E pontok egy körön vannak.

BÁ/8. Az a, b pozitív egészek kettőnél nagyobbak. Igazoljuk, hogy van olyan k pozitív egész, és van olyan $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pozitív egészekből álló sorozat, melyre $n_1 = a, n_2 = b$ és $n_i + n_{i+1} \mid n_i n_{i+1}$ minden $1 \leq i < k$ egészre.

8.3. Terjék András

TA/1. Milyen $n \geq 3$ egész számokra vannak olyan $a_1, a_2, ..., a_{n+2}$ számok, amelyekre $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$, és $i \in \{1, 2, ..., n\}$ esetén $a_i \cdot a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$?

TA/2. Alfréd a robot egy gomb megnyomására kiad egy egész számot véletlenszerűen 1 és n között. Várhatóan hányszor kell megnyomnunk Alfrédot, hogy 1 és n között az összes számot kiadja?

TA/3. $p(x)$ és $q(x)$ valós együtthatós polinomok, bármilyen valós x-re $p(x) \neq q(x)$. Továbbá bármilyen x-re $p(q(x)) = q(p(x))$.
Bizonyítsd, hogy bármilyen valós x-re $p(p(x)) \neq q(q(x))$.

TA/4. Legyen $a_1, a_2, ...$ egy egészekből álló sorozat, melynek végtelen sok pozitív, és végtelen sok negatív tagja van. Teljesül, hogy minden pozitív egész n-re $a_1, a_2, ...a_n$ egy teljes maradékrendszert alkod mod n. Bizonyítsd be, hogy minden egész szám pontosan egyszer szerepel a sorozatban.

TA/5. Bizonyítsd, hogy tetszőleges ponthalmaz (véges sok pont, semelyik 3 nem esik egy egyenesre) bármilyen háromszögelésében ugyanannyi a háromszögek száma.

TA/6. Adott ABC háromszög. Ennek egy belső P pontjának legyen a BC, CA, AB oldalakra vett vetülete A_1, B_1, C_1. Legyen $b(ABC)$ az ABC háromszög beírt körének sugara. Hol vannak azok a P pontok, amelyekre

$$b(PAC_1) + b(PBA_1) + b(PCB_1) = b(PC_1B) + b(PA_1C) + b(PB_1A)?$$

TA/7. Balázs gondolt n db egész számra, majd a gondolt számok összes részhalmazában a tagok összegét felírta egy lapra. Ki lehet-e találni az így keletkezett 2^n db számból a gondolt számokat?

TA/8. Adott $n = \frac{3^k-3}{2}$ látszólag egyforma érme, ezekből egy hamis (könyebb vagy nehezebb a többinél). Bizonyítsd, hogy k db előre megadott méréssel megtalálható a hamis érme, és eldönthető, hogy könyebb vagy nehezebb a többinél.

9. Tanári feladatok

T/1. Egy kör alakú asztalnál n játékos foglal helyet, akik között valahogyan szétosztunk $n-1$ korongot. Ezután a játékosok a következő szabály szerint adogatják egymás között a korongokat: ha létezik olyan játékos, akinél legalább két korong van, akkor valamelyik ilyen játékos átad egy-egy korongot a két szomszédjának. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is adogatnak, előbb-utóbb minden játékosnál legfeljebb egy korong lesz.
(Kürschák 2006/3).

T/2. Az $x, y, z > 0$ valós számokra teljesül, hogy $xyz \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0$$

(IMO 2005/3, a feladatot Iurie Boreico különdíjas megoldása tette híressé.)
A táborban a BB/8 feladat kapcsán került elő, amelyre Nádor Benedek egy Muirhead-egyenlőtlenséget használó megoldást adott.

T/3. Legyen p egy páratlan prím és legyenek a, b, c egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az

$$ax^2 + by^2 + cz^2 \equiv 0 \mod p$$

egyenletnek létezik nemtriviális megoldása. (Triv. megoldás: x, y, z mind osztható p-vel.)
Ez a feladatot az FZs/1. kapcsán tűzte ki Németh Balázs. Az FZs/1 állítása segít a megoldásban.

T/4. Legyen k egy rögzített pozitív egész szám. Ismert, hogy ekkor létezik egy olyan $p(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre minden n pozitív egész szám esetén teljesül, hogy

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = p(n)$$

Bizonyítsd be, hogy $p(n)$ polinomból kiemelhető $n(n+1)$.
Ez a feladat az FZs/1. kapcsán merült fel, annak egy bizonyítás megkapható belőle.

T/5. Bizonyítsuk be, hogy minden e élű, összefüggő gráf csúcsai között ki lehet osztani e chipet úgy, hogy az ebből a helyzetből indított chip-firing játék végtelen hosszú legyen.

T/6. A T/1 játékban most n zsetont osztunk szét. Hogyan lehet gyorsan eldönteni a kezdőhelyzetről, hogy véges vagy végtelen játékot eredményez?