

## Valószínűségszámítás a hat évfolyamos, speciális matematika tagozat tantervében

- Az **a.** pont alatt osztályonként sorra vesszük az egyes témaköröket.
- A **b.** pontban röviden, tömören jellemezzük az adott témakörhöz tartozó tananyagot, megjelölve, hogy a szóban forgó tananyagrészen mi a "törzsanyag" és "kiegészítő anyag". Egyszerűség kedvéért csak a kiegészítő anyagot tesszük szögletes zárójelbe.
- A **c.** pontok az adott témakörhöz tartozó **fogalmakat**, a **d.** pontok a **tételeket, összefüggéseket**, az **e.** pontok pedig azokat az **eljárásokat, algoritmusokat** sorolják fel, amelyek a követelményekben szerepelnek.
- Az **f.** pont részletesebb útmutatást ad arra, hogy a követelmények pontosabb értelmezését segítse, mélységét tisztázza.
- A **g.** pont esetenként a más tárgyakkal való kapcsolatra utal.

### 7. 12. a. Valószínűségszámítás, statisztika 10 óra

7. 12. b. Első ismerkedés a valószínűség fogalmával; egyszerű kísérletek, játékok elemzése kapcsán. Statisztikai adatok lejegyzése, grafikonok olvasása.
7. 12. c. A valószínűség szemléletes fogalma.
7. 12. d. -----
7. 12. e. Kísérletek eredményének megfigyelése, az adatok lejegyzése és értékelése; egyszerű, például kockadobással kapcsolatos játékok elemzése. A kísérleti adatok szemléltetése grafikonon.
7. 12. f. Például: András és Béla felváltva dobnak két kockával. András nyer, ha a dobott pontok összege 6, 7 vagy 8, egyébként Béla. Kinek van nagyobb esélye arra, hogy nyer?

### 8. 12. a. Valószínűségszámítás, statisztika 10 óra

8. 12. b. A kombinatorikus módszerekkel megoldható konkrét valószínűségszámítási feladatok egyszerű esetei. Átlag, medián, módusz.
8. 12. c. Események; lehetetlen, biztos esemény; komplementer esemény. Műveletek események között (szemléletesen). Gyakoriság, relatív gyakoriság.  $n$  szám mediánja, átlaga. A valószínűség intuitív fogalmának megvilágítása "meglepő" végeredményű, egyszerű feladatokkal (pl. három korong).
8. 12. d.  $n$  szám mediánjának meghatározása.
8. 12. e.  $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$  konkrét feladatokban (vö. szita 8.1.-ben). Valószínűségi feladatok megoldása komplementer esemény valószínűségének kiszámolásával (pl. mennyi a valószínűsége, hogy egy autórendszámban szerepel 1-es). "Meglepő" eredményű feladatok (pl. minek nagyobb a valószínűsége, hogy 7-et, vagy hogy 6-ot dobunk két kockával; három korong, stb.). Kockadobással, pénzdobással kapcsolatos egyszerű események valószínűségének meghatározása összeszámlálással, fagráf segítségével.
8. 12. f. Pl.: minek nagyobb a valószínűsége: hat kockával legalább egy hatost dobunk vagy tizenkét kockával legalább két hatost? Egyszerű statisztikai adatok elemzése, következtetések megfogalmazása (pl. betűstatisztika).

### 9. 12. a. Valószínűségszámítás, statisztika 20 óra

9. 12. b. A klasszikus valószínűségi modell; egyszerű eloszlások.
9. 12. c. Elemi események, klasszikus valószínűségi modell. Eseménytér. (Diszkrét valószínűségi változó. Binomiális eloszlás, hipergeometrikus eloszlás. Várható érték előkészítése. A valószínűség, mint "nem tudásunk mértéke": miért és hogyan változik annak valószínűsége, hogy a második kártya piros, ha az elsőt felfordítom?)
9. 12. d. A várható érték tulajdonságai; a várható értéket nem feltétlenül veszi fel a valószínűségi változó. Konkrét eloszlásokban annak igazolása, hogy valóban eloszlásról van szó.
9. 12. e. A modellezés, mint matematikai tevékenység. Modellezés egyszerűbb esetekben. Egyszerűbb paraméterek esetén a binomiális és, hipergeometrikus eloszlás várható értékének kiszámítása. Mikor van, mikor nincs szimmetria; kombinatorikus és szimmetrián alapuló feladatok megoldása.

*Valószínűségszámítás a hat évfolyamos, speciális matematika tagozat tantervében*

9. 12. f. Kockadobással, pénzdobással, valószínűségi játékokkal kapcsolatos összetett feladatok. Melyik a "jobb" tipp (pl. lottónál: ha az 1, 2, 3, 4, 5-re tippel, ha az 1, 3, 5, 7, 9-re tippel, ha a 2, 25, 34, 76, 85-re tippel, ha egy véletlenszerűen választottra tippel?). Példák arra, hogy jól kell kérdezni (pl. ha 1-től 6-ig, 10-ig véletlenszerűen választott számról akarom megtudni, hogy páros-e, lásd "Ismerkedés a véletlennel").

9. 12. g. A valószínűség biológiai alkalmazásai.

**10. 12. a. Valószínűségszámítás, statisztika 20 óra**

10. 12. b. Várható érték. Legvalószínűbb érték. A játékelmélet elemei.

10. 12. c. Feltételes valószínűség. Geometriai [és negatív binomiális] eloszlás. Várható érték. Eloszlás legvalószínűbb értéke. Szórás konkrét feladatokon. A játékelmélet elemei ( $2 \times 2$ -es játékoknál), a "legjobb stratégia" fogalma, mit követelünk tőle.

10. 12. d. Szimmetrikus eloszlások. A megismert eloszlások várható értéke (valószínűségi és algebrai úton), legvalószínűbb értéke. A várható értéktől való eltérés 0. A várható értékek összeadódnak [a bizonyítás fakultatív]. A  $2 \times 2$ -es játékoknak mindig van "legjobb stratégiája".

10. 12. e. A feltételes valószínűség alkalmazása feladatokban. Szimmetria-megfontolások alkalmazása a várható érték kiszámításánál, pl. a lottón kihúzott számok közül a középső [vagy pl. a 2.] várható értéke. Az ismert eloszlások alkalmazása konkrét feladatokban. A  $2 \times 2$ -es játék elemzése [több dimenziós játékok egyszerűbb eseteinek elemzése].

10. 12. f. A várható érték kiszámítása az ismert eloszlásoknál és más feladatokban. "Ferde foci", egyszerű bolyongási feladatok.

**11. 12. a. Valószínűségszámítás, statisztika 20 óra**

11. 12. b. A geometriai valószínűség. Bayes-tétel. [Markov-láncok.] Szórás.

11. 12. c. A geometriai valószínűség (integrál nélkül). Teljes eseményrendszer. [Véges állapotú Markov-láncok. A, az egyes állapotokhoz tartozó valószínűség jelentése.] Szórás.

11. 12. d. Teljes valószínűség tétele; Bayes-tétel. [A Markov-láncokhoz tartozó lineáris egyenletrendszerek. A Markov-láncok valószínűségei és várható lépésszámai.] Az ismert eloszlások szórása.

11. 12. e. Feladatok megoldása a teljes valószínűség tételével és Bayes-tétellel (annak tisztázása, hogy miért nem lehet egyszerűbben). [Markov-láncok felírása (az állapotok jó választása) és a megfelelő valószínűségek kiszámítása.] Bolyongási feladatok megoldása. A várható érték felhasználása pozitív értékű valószínűségi változónál a valószínűség becslésére (a nagy számok törvényének előkészítése). Geometriai valószínűséggel megoldható feladatok.

**12. 12. a. Valószínűségszámítás, statisztika 20 óra**

12. 12. b. A nagy számok törvénye; Markov-egyenlőtlenség. Ismétlés.

12. 12. c. A nagy számok törvényének jelentése. [Folytonos eloszlások.] [Geometriai eloszlások integrállal.] A valószínűség egyszerű fogalmainak ismétlése (kombinatorikus módszerek valószínűségek kiszámításánál; klasszikus valószínűségi modell, változó, egyszerű eloszlások).

12. 12. d. Markov-egyenlőtlenség. A nagy számok törvénye. Ismétlés: a valószínűség tulajdonságai, a, mint az az érték, amelytől legkisebb a négyzetes eltérés, szórás; az egyszerű várható értékek és szórások.

12. 12. e. Valószínűség becslése a szórás segítségével. Szimmetria megfontolások és kombinatorikus módszerek alkalmazása a valószínűség kiszámítására. Visszatevéses és visszatevés nélküli feladatok. (Ismétlés.)

12. 12. f. [Integrál felhasználása a valószínűségszámításban.]