807. Oldjuk meg természetes számokban az

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=m \tag{1}$$

egyenletet.

Dr. Csekó György, Sarkad

Megoldás: Tegyük fel, hogy m adott poztív egész szám, és (x, y, z) pozitív egész megoldása (1)-nek. Akkor

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}=3.$$

Tehát $m=1$; 2-re (1)-nek nincs pozitív egész megoldása.

Nézzük az $m=3$ esetet! Tegyük fel, hogy (x, y, z) pozitív egész megoldás! Akkor $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$, mert a számtani és mértani közép akkor és csak akkor egyezik meg, ha a számok egyenlők. Mivel ezek a megegyező közepek 1-gyel egyenlők, ezért

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}=1,$$

azaz $x=y=z$.

Megfordítva: nyilvánvaló, hogy bármilyen $x=y=z$ pozitív egész számhármas megoldás. Így (1)-nek az összes pozitív egész megoldása az $m=3$ esetben: (t, t, t), ahol t tetszőleges pozitív egész szám.

Lényegesen nehezebbek a következő esetek: m adott, 3-nál nagyobb pozitív egész szám, illetve m adott pozitív racionális szám (az utóbbi magában foglalja az előzőt és az $m=1,2,3$ esetet is).

Ha m adott 3-nál nagyobb pozitív egész szám, és feltesszük, hogy (x, y, z) pozitív egész megoldás, akkor ez a számhármas kielégíti az (1)-ből következő

$$x y^{2}+y z^{2}+z x^{2}=m x y z=0$$

egyenletet is. Ebből következik, hogy

$$x \mid y z^{2} \text{ és } y \mid z x^{2} \text{ és } z \mid x y^{2}$$

Ha $(x ; y ; z)$ páronként relatív prímek, akkor ebből ismert tétel alapján ezt kapjuk: $x \mid 1,\ y \mid 1,\ z \mid 1$, azaz $x=y=z=1$, ebből pedig $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3$, ami ellentmondás. Ilyen megoldás tehát nem létezik.

Ha $(x ; y ; z)$ páronként nem relatív prímek, akkor már találunk megoldást, pl.:

$m=5$ esetén: $(1,2,4)$;

$m=6$ esetén: $(2,12,9),\ (3,18,4)$.

Egy-egy megtalált (x_{0}, y_{0}, z_{0}) megoldás végtelen sok megoldást ad, hiszen tetszőleges k pozitív egész számmal $(k x_{0} ; k y_{0} ; k z_{0})$ nyilvánvalóan megoldás.

Baky Miklós, Nagykőrös és Kőváry Károly, Budapest