4. Az ABC háromszög kerülete 12 cm, területe 6 cm^2. Legyen P az ABC háromszög egy belső pontja. A P pontnak a BC, CA és AB oldalak egyeneseire vonatkozó merőleges vetületei legyenek rendre D, E és F. Tekintsük az alábbi összeget

$$S = \frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}.$$

(a) Határozzuk meg S minimális értékét.

(b) A háromszög mely P belső pontjára lesz S értéke minimális?

Megoldás: Jelölje a háromszög oldalait a szokásos módon a, b, és c és legyen továbbá $PD = x$, $PE = y$ és $PF = z$. Ezen jelölésekkel

$$S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}.$$

Az ABC háromszög T területe az ABP, BCP és CAP háromszögek területének összegével egyenlő. Így $2T = ax + by + cz = 12\text{cm}^2$. 1 pont

Mivel T rögzített, ezért S pontosan akkor lesz minimális, amikor $2TS$, ezért vizsgáljuk ez utóbbit:

$$2TS = (ax + by + cz)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \qquad \text{2 pont}$$

A szorzást elvégezzük és kihasználjuk, hogy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2:

$$2TS = a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + bc\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + ca\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq$$

$$\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 = (12\text{cm})^2 \qquad \text{2 pont}$$

A becslés során használt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $x = y$. $2TS$ és egyúttal S tehát akkor lesz minimális, ha $x = y = z$, azaz P a háromszög beírt körének középpontja. Mivel $2T = 12\text{cm}^2$ és $2TS$ minimumának értéke $(12\text{cm})^2$, ezért S minimális értéke 12. 2 pont

Összesen 7 pont