3. Tekintsük az összes olyan parabolát, melyek egyenlete $y = x^2 + ax + b$, ahol a és b valós számok, továbbá a koordinátatengelyeket három különböző pontban metszik. Bármely parabola esetén ez a három pont meghatároz egy kört. Mutassuk meg, hogy az összes ilyen kör átmegy egy közös ponton.

Megoldás: Jelölje a parabola és az y tengely metszéspontját y_1. Ennek értékét megkapjuk, ha az $y = x^2 + ax + b$ egyenletbe az $x = 0$-t helyettesítjuk, így $y_1 = b$. $b = 0$ nem lehet, mert akkor a parabola áthalad az origón és nem jöhet létre a tengelyekkel három metszéspont. 1 pont

A parabola és az x tengely metszéspontjai a $0 = x^2+ax+b$ másodfokú egyenlet gyökei. Jelölje ezeket x_1 és x_2. A feladat szövege szerint a parabola három különböző pontban metszi a tengelyeket. Mivel az y tengelyt csak egyetlen pontban metszi, ezért $x_1 \neq x_2$, azaz $a^2 - 4b > 0$. 1 pont

Legyen y_2 a feladat szövegében szereplő kör és az y tengely második metszéspontja. Amennyiben a kör érinti az y tengelyt, akkor legyen $y_2 = y_1$.

Tekintsük az origónak a körre vonatkozó hatványát az x és az y tengelyekkel, mint szelőkkel. 2 pont

Mivel mindkét szelőre a hatvány ugyanakkora, ezért $x_1x_2 = y_1y_2$. A Viéte formula alapján $x_1x_2 = b$, továbbá $y_1 = b$. Mivel $b \neq 0$, így $y_2 = 1$. 2 pont

y_2 értéke konstans, tehát az összes kör, amely a feladat szövegének eleget tesz átmegy a $(0; 1)$ ponton. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A bizonyítás befejezhető a pont körre vonatkozó hatványa nélkül is, ha a kör $K = \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ középpontjának a távolságát felírjuk kétféleképpen az x és az y tengelyeken levő metszéspontoktól.