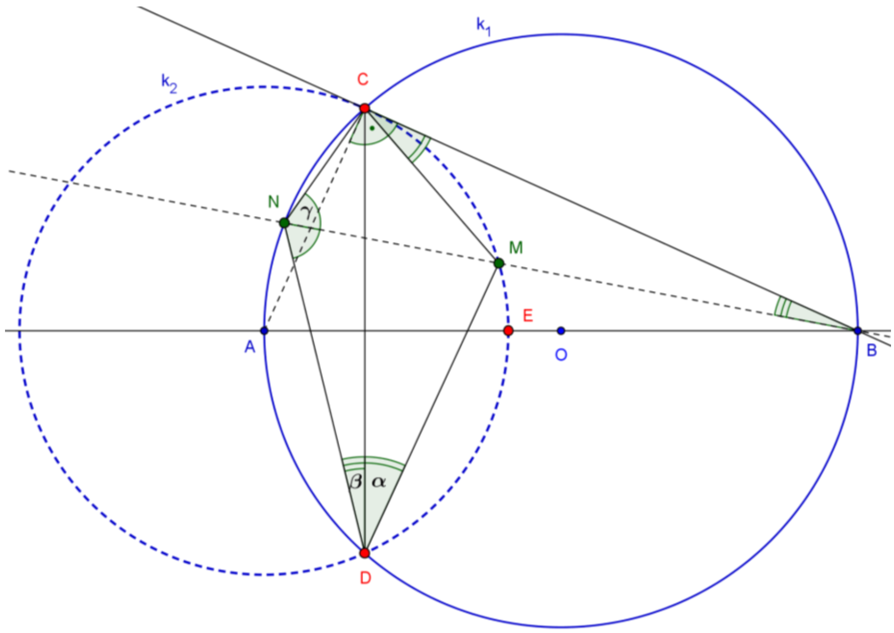
3. Messe az AB átmérőjű k_1 kört a C és D pontokban az A középpontú k_2 kör. A k_2 körnek az AB átmérőre eső pontja legyen E! Válasszuk ki a k_2 körnek az ABC háromszög belsejébe eső CE körívén az ív egy tetszőleges M belső pontját! A BM egyenes és a k_1 kör másik metszéspontját jelöljük N-nel!
Bizonyítsa be, hogy

$$MN^2 = CN \cdot DN!$$

Megoldás:

Jelöléseink az 1. ábrán láthatók.



1. ábra 1 pont

A bizonyítandó

$$MN^2 = CN \cdot DN$$

összefüggés azonos átalakítása után elég megmutatni, hogy

$$\frac{MN}{DN} = \frac{CN}{MN}.$$ 1 pont

Ehhez elegendő igazolni, hogy a

$$CMN \text{ és } MDN$$

háromszögek hasonlóak.

A két háromszög hasonlóságának belátásához elég bizonyítani, hogy megfelelő szögeik páronként megegyeznek, azaz:

$$CMN\angle = MDN\angle \text{ és } CNM\angle = MND\angle.$$ 1 pont

Mivel AB a k_1 kör átmérője, ezért a Thalész-tétel szerint AC merőleges BC-re, ebből következik, hogy BC egyenese a k_2 kör érintője. 1 pont

Ezért a k_2 körben $BCM\angle$ érintő szárú kerületi szög, és így az $MDC\angle = \alpha$ jelöléssel

$$BCM\angle = MDC\angle = \alpha .$$

A k_1 körben a kerületi szögek tételéből a $CDN\angle = \beta$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$CBN\angle = CDN\angle = \beta .$$

1 pont

Az AB egyenese a k_1 és k_2 körök közös szimmetriatengelye, erre a tengelyre nézve a C és D pontok egymás tükörképei, ezért $BC = BD$.

Ez azt is jelenti, hogy a k_1 körben a két húrhoz azonos nagyságú kerületi szögek tartoznak, tehát a $CNB\angle = \gamma$ jelölést választva

$$CNB\angle = BND\angle = \gamma .$$

1 pont

A $CMN\angle$ a BCM háromszög külső szöge, ezért

$$CMN\angle = BCM\angle + CBM\angle = \alpha + \beta .$$

1 pont

A CMN és MDN háromszögekben két-két szög nagysága megegyezik, mert

$$CMN\angle = MDN\angle = \alpha + \beta$$

és

$$CNM\angle = MND\angle = \gamma ,$$

ezért a két háromszög hasonló. 1 pont

Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik,

$$\frac{MN}{DN} = \frac{CN}{MN},$$

ebből pedig a bizonyítandó

$$MN^2 = CN \cdot DN$$

állítás következik. 2 pont

Összesen: 10 pont