1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1-x}{\sqrt{\dfrac{1}{x}}}$ egyenletet.

<u>Megoldás:</u>

A négyzetgyök értelmezése miatt nyilvánvaló, hogy $x>0$. Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát a $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ tényezővel, ekkor a műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy

(1) $$\sqrt{x+\frac{1}{x}}=1-x.$$

Mivel $x>0$, ezért az ismert egyenlőtlenség szerint $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$, és így $\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}\geq\sqrt{2}$, ebből pedig (1) szerint $1-x\geq\sqrt{2}$, azaz $x\leq 1-\sqrt{2}$. Ez azonban ellentmond az $x>0$ feltételnek, hiszen $1-\sqrt{2}<0$, ezért a feladatnak nincs valós megoldása.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\sqrt{4x^2-4x+2}=\dfrac{\sqrt{2}-\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}{\sqrt{\dfrac{1}{2x-1}}}$ egyenletet.

<u>Megoldás:</u> néhány átalakítási lépés után hasonlóságokat fedezhetünk föl ebben és az előző feladatban.

A négyzetgyök értelmezése miatt és amiatt, hogy egy tört nevezője nem lehet zérus, azt kapjuk, hogy $2x-1>0$, vagyis $x>\dfrac{1}{2}$. A $\sqrt{\dfrac{1}{2x-1}}$ tényezővel való szorzás után $\sqrt{\dfrac{4x^2-4x+2}{2x-1}}=\sqrt{2}-\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$. Nyilvánvaló, hogy $4x^2-4x+2=(2x-1)^2+1$, így az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenlet a következő:

(1) $$\sqrt{\frac{(2x-1)^2+1}{2x-1}}=\sqrt{2}-\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2.$$

Legyen most $\sqrt{2x-1}=a$, a feltétel alapján $a>0$. Ezzel (1)-ből a $\sqrt{\frac{a^4+1}{a^2}}=\sqrt{2}-(a-1)^2$ egyenletet kapjuk. Mivel $\frac{a^4+1}{a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}$, ezért (1) bal oldalán egy pozitív szám és reciproka összegének négyzetgyöke áll. Így a $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}\geq\sqrt{2}$ egyenlőtlenség miatt (1)-ből $\sqrt{2}-(a-1)^2\geq\sqrt{2}$ következik, ebből pedig

(2) $$(a-1)^2\leq 0\,.$$

Ez pedig a valós számok halmazán csak úgy lehetséges, ha az egyenlőtlenségben az egyenlőség esete áll fenn, azaz $(a-1)^2=0$, vagyis csak $a=1$ valósulhat meg. Eszerint $\sqrt{2x-1}=1$, ahonnan egyszerű számolással adódik, hogy $x=1$. Ellenőrizhető, hogy ez valóban megoldása az eredeti egyenletnek, behelyettesítéskor mindkét oldal számértéke $\sqrt{2}$.

3. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a $\sqrt[3]{\log_3^3 x+\log_x 9}=\frac{\sqrt[6]{3\cdot\log_x^5 3+\log_x 729-(\log_x 3)\cdot\log_3\left(1+\sqrt{y}\right)}}{\sqrt{\log_x 3}}$ egyenletet.

<u>Megoldás:</u> (vázlat)

a logaritmus értelmezése miatt $x>0$ és $x\neq 1$, a négyzetgyök értelmezéséből $y\geq 0$ következik, ennek megfelelően $1+\sqrt{y}\geq 1$, és ezzel $\log_3\left(1+\sqrt{y}\right)\geq 0$. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $\log_x 3$ pozitív szám. A $\log_3 x=a$ helyettesítéssel egyrészt $\log_x 3=\frac{1}{a}$, másrészt $\log_x 9=\log_x 3^2=2\cdot\frac{1}{a}$, illetve $\log_x 729=\log_x 3^6=6\cdot\frac{1}{a}$, a $\log_x 3>0$ miatt $\frac{1}{a}>0$, és így $a>0$.

Ezeket a jelöléseket használva, a különböző gyökkitevős kifejezéseket azonos gyökkitevőjű kifejezésekké írva és a feltételeket figyelembe véve a kiinduló egyenletet átalakíthatjuk. Ekvivalens átalakítások után az

(1) $$(a^4-1)^2=-a^4\cdot log_3\left(1+\sqrt{y}\right)$$

egyenletet kapjuk.

A feltételek miatt (1) jobb oldala nem pozitív, bal oldala nem negatív, ez csakis úgy lehet, ha mindkét oldal zérus. Eszerint $a^4=1$ és $\log_3\left(1+\sqrt{y}\right)=0$. A feltételek szerint ebből $a=1$, illetve $\log_3 x=1$, valamint $1+\sqrt{y}=1$ következik, innen pedig $x=3$ és $y=0$. Ez a számpár a feladat egyetlen megoldása.

4. Oldjuk meg az $\left(5^x-2^{x-2}\right)^2+2\cdot\lg\left(5^x+2^{x-2}\right)=x$ egyenletet a valós számok halmazán.

<u>Megoldás:</u> mivel az 5, és a 2 tetszőleges valós kitevőjű hatványa pozitív, ezért nyilvánvaló, hogy a $\lg\left(5^x+2^{x-2}\right)$ logaritmikus kifejezés numerusza is pozitív. Vezessük be az $5^x=a$, és a $2^{x-2}=b$ jelöléseket, az utóbbiból $\frac{2^x}{4}=b$, illetve $2^x=4b$ azonnal adódik. A hatványozás azonosságának alkalmazásával $10^x=4ab$. Mivel $a>0$, valamint $b>0$, ezért mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve $x=\lg 4ab$. Ezekkel a jelölésekkel az eredeti egyenlet alakja:

$$(1)\qquad (a-b)^2+\lg(a+b)^2=\lg 4ab\,.$$

Az (1) egyenlet átrendezésével és a logaritmus azonosságának alkalmazásával kapjuk, hogy

$$(2)\qquad (a-b)^2=\lg\frac{4ab}{(a+b)^2}\,.$$

Könnyen beláthatjuk, hogy $(a+b)^2\geq 4ab$, így $\frac{4ab}{(a+b)^2}\leq 1$. Ebből pedig a 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő tulajdonsága miatt $\lg\frac{4ab}{(a+b)^2}\leq \lg 1$, vagyis $\lg\frac{4ab}{(a+b)^2}\leq 0$ következik. Ez (2) alapján azt jelenti, hogy $(a-b)^2\leq 0$. Az utóbbi egyenlőtlenségben nyilván csak az egyenlőség állhat fenn, eszerint pedig $a=b$.

Ha $a=b$, akkor $5^x=2^{x-2}$, vagyis $\left(\frac{2}{5}\right)^x=4$. Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve $x=\frac{\lg 4}{\lg\frac{2}{5}}$, vagy másként $x=\frac{\lg 4}{\lg 2-\lg 5}$. Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért a kapott valós szám valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

5. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a következő egyenletrendszert:
$x+y+\left(z^2-8z+14\right)\cdot\sqrt{x+y-2}=1$, $\qquad 2x+5y+\sqrt{xy+z}=3$.

<u>Megoldás:</u> vizsgáljuk meg előbb a feltételeket. Az első egyenletből láthatjuk, hogy, hogy $x+y\geq 2$, ugyanakkor $x+y=2$ nem lehetséges, mert ekkor az egyenletben a bal oldal értéke 2, a jobb oldal értéke 1 lenne. Tehát csakis $x+y>2$ lehetséges.

Ebből az is következik, hogy ha bevezetjük az $a=\sqrt{x+y-2}$ jelölést, akkor $a>0$.

Ezzel a jelöléssel az első egyenlet alakja 0-ra rendezve:

(1) $$a^2+1+\left(z^2-8z+14\right)\cdot a=0$$

Mivel $a>0$, ezért (1) mindkét oldalát oszthatjuk a-val, majd átrendezés után azt kapjuk, hogy:

(2) $$a+\frac{1}{a}=-z^2+8z-14.$$

Az a-ra vonatkozó feltétel miatt $a+\frac{1}{a}\geq 2$, így (2)-ből $-z^2+8z-14\geq 2$ következik, ebből pedig

(3) $$z^2-8z+16\leq 0.$$

A (3) egyenlőtlenség bal oldalán teljes négyzet áll, ezért $(z-4)^2\leq 0$. Az utóbbi egyenlőtlenségben azonban csak az egyenlőség állhat fenn, ezért $z=4$. Ez azt is jelenti, hogy az $a+\frac{1}{a}\geq 2$ egyenlőtlenségben is egyenlőség van, így $a=1$, ebből pedig rövid számolás után $x+y=3$ adódik.

A $z=4$ és az $y=3-x$ a második egyenletbe írva, néhány átalakítási lépés után a $\sqrt{x\cdot(3-x)+4}=3-2x-5\cdot(3-x)$ egyenletet eredményezi. A műveletek elvégzése és rendezés után ebből a $\sqrt{-x^2+3x+4}=3x-12$ egyenletet kapjuk. Innen például négyzetre emeléssel és rendezéssel a $2x^2-15x+28=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $x_1=4$ és $x_2=\frac{7}{2}$. Ennek megfelelően $y_1=-1$ és $y_2=-\frac{1}{2}$. Az $x_2=\frac{7}{2}; y_2=-\frac{1}{2}; z_2=4$ számhármas nem elégíti ki a második egyenletet, az $x_1=4; y_1=-1; z_1=4$ számhármas mindkét egyenletet kielégíti, ezért ez a feladat egyetlen megoldása.

6. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a $x+2y+3z=2\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2y-1}+\sqrt{3z-1}\right)$ egyenletet.

Megoldás: a négyzetgyök értelmezése miatt $x\geq 1$; $y\geq\frac{1}{2}$ és $z\geq\frac{1}{3}$ egyszerre teljesül. Az egyenlet jobb oldala akkor és csak akkor lehet zérus, ha mindegyik négyzetgyökös kifejezés nulla. Ha ez megvalósulna, akkor $x=1$; $y=\frac{1}{2}$ és $z=\frac{1}{3}$ egyszerre lenne igaz, de ekkor a bal oldal értéke is nulla kellene, hogy legyen, miközben ezekkel a számokkal $x+2y+3z=3$. Ez azt is jelenti, hogy $x=1$; $y=\frac{1}{2}$ és $z=\frac{1}{3}$ egyszerre nem állhat fönn, így az $x\geq 1$; $y\geq\frac{1}{2}$ és $z\geq\frac{1}{3}$ feltételek alapján $x+2y+3z-3>0$.

Tekintsük most az $\vec{u}\left(\sqrt{x-1};\ \sqrt{2y-1};\ \sqrt{3z-1}\right)$ és a $\vec{v}(2;\ 2;\ 2)$ vektorokat. A bevezetésben említettek szerint a két vektor skaláris szorzata éppen a megoldandó egyenlet jobb oldala. Ezért a skaláris szorzat $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\varphi$ definíciója alapján:

(1) $$\sqrt{x+2y+3z-3}\cdot\sqrt{12}\cdot\cos\varphi=x+2y+3z\,.$$

Vezessük be a $c=\sqrt{x+2y+3z-3}$ jelölést, ezzel az (1) egyenletből azt kapjuk (a $\sqrt{12}=2\cdot\sqrt{3}$ azonosságot alkalmazva), hogy:

(2) $$2\cdot\sqrt{3}\cdot c\cdot\cos\varphi=c^2+3\,.$$

Az $x+2y+3z-3>0$ feltétel miatt $c>0$, ezért (2)-ből $\cos\varphi=\frac{c^2+3}{2\cdot\sqrt{3}\cdot c}$, és mivel $\cos\varphi\leq 1$, ezért

(3) $$\frac{c^2+3}{2\cdot\sqrt{3}\cdot c}\leq 1\,.$$

A (3) egyenlőtlenségből ekvivalens módon következik, hogy $c^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot c+3\leq 0$, azaz:

(4) $$\left(c-\sqrt{3}\right)^2\leq 0\,.$$

A (4) ismét olyan egyenlőtlenség, amelyben csak az egyenlőség esete állhat fenn, ezért $c=\sqrt{3}$.

Ha a kapott értéket behelyettesítjük például a (2) egyenletbe, akkor azt kapjuk, hogy $\cos\varphi = 1$, tehát $\varphi = 0°$, ezért az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok egyirányúak. Eszerint $\frac{\sqrt{x-1}}{2} = \frac{\sqrt{2y-1}}{2} = \frac{\sqrt{3z-1}}{2} = k$, ahol $k > 0$ valós szám. Ebből a kiinduló egyenlet alapján következik, hogy $12k^2 + 3 = 12k$, ebből a $4k^2 - 4k + 1 = 0$ egyenletet kapjuk.

Ennek egyetlen valós megoldása $k = \frac{1}{2}$, hiszen $4k^2 - 4k + 1 = (2k-1)^2$. A $k = \frac{1}{2}$ szerint pedig $\frac{\sqrt{x-1}}{2} = \frac{\sqrt{2y-1}}{2} = \frac{\sqrt{3z-1}}{2} = \frac{1}{2}$, innen egyszerű számolással adódik az egyenlet egyetlen megoldása, az $x = 2;\ y = 1;\ z = \frac{2}{3}$ számhármas.

A feladat természetesen más módon is megoldható. Például az $a = \sqrt{x-1}$; $b = \sqrt{2y-1}$ és $c = \sqrt{3z-1}$ helyettesítések bevezetésével az egyenlet 0-ra rendezett alakjában az egyenlet egyik oldalán teljes négyzetek összege áll, de alkalmazhatjuk a Cauchy-egyenlőtlenséget is. A fenti megoldás érdekessége abban áll, hogy a feladatot ***így is*** meg lehet oldani.

7. Adjuk meg azokat az x, y, z, t valós számokat, amelyek egyidejűleg kielégítik a következő egyenletet és egyenlőtlenséget: $x + y + z = \frac{3}{2}$, és $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4y-1} + \sqrt{4z-1} \geq 2 + 3^{\sqrt{t-2}}$.

<u>Megoldás:</u> tekintsük az $\vec{u}\left(\sqrt{4x-1};\ \sqrt{4y-1};\ \sqrt{4z-1}\right)$ és a $\vec{v}(1;\ 1;\ 1)$ vektorokat. A két vektor skaláris szorzata éppen a feladatbeli egyenlőtlenség bal oldala. Ugyanakkor $|\vec{u}| = \sqrt{4x + 4y + 4z - 3}$ és $|\vec{v}| = \sqrt{3}$. Mivel a feladatban adott volt az $x + y + z = \frac{3}{2}$ egyenlőség is, ezért egyszerű számolással kapjuk, hogy $|\vec{u}| = \sqrt{3}$, vagyis az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok hossza egyenlő. A skaláris szorzat definíciója szerint $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4y-1} + \sqrt{4z-1} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\varphi$, ezzel az egyenlőtlenség:

$$2 + 3^{\sqrt{t-2}} \leq 3 \cdot \cos\varphi\ . \tag{1}$$

Mivel $\cos\varphi \leq 1$, ezért (1)-ből $2 + 3^{\sqrt{t-2}} \leq 3$, illetve $3^{\sqrt{t-2}} \leq 1$. Ez a 3-as alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedése miatt csak úgy lehetséges, ha $\sqrt{t-2} \leq 0$. Mivel azonban $\sqrt{t-2}$ a valós számok halmazán nemnegatív kifejezés, ezért csak $\sqrt{t-2} = 0$, azaz $t = 2$ állhat fenn. Innen az következik, hogy az (1) egyenlőtlenségben egyenlőség van, azaz $\cos\varphi = 1$, vagyis $\varphi = 0°$, tehát az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok egyirányúak. Ha pedig $\vec{u}$ és $\vec{v}$ egyenlő hosszúságú és egyirányú vektorok, akkor ez a két vektor egyenlő, ezért a megfelelő koordinátáik rendre megegyeznek. Ebből $\sqrt{4x-1} = 1$;

$\sqrt{4y-1}=1$ és $\sqrt{4z-1}=1$ következik. Innen egyszerű számolással adódik a feladat egyetlen megoldása, az $x=\frac{1}{2};\ y=\frac{1}{2};\ z=\frac{1}{2};\ t=2$ számnégyes. Ez megfelel annak a kezdeti feltételnek is, hogy a négyzetgyök tulajdonsága miatt $x\geq\frac{1}{4},\ y\geq\frac{1}{4},\ z\geq\frac{1}{4}$.

8. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a $\sqrt{x^2-16}+\sqrt{y^2-8}+\sqrt{z^2-3}=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-12$ egyenletet.

Megoldás: könnyen belátható, hogy $x^2\geq 16$, $y^2\geq 8$, $z^2\geq 3$. Ezekben a feltételi egyenlőtlenségekben azonban nem lehet egyszerre egyenlőség, mert akkor az egyenlet bal oldala nulla lenne, míg a jobb oldal pozitív, ezért $x^2+y^2+z^2-27>0$.

Legyen $\vec{u}\left(\sqrt{x^2-16};\ \sqrt{y^2-8};\ \sqrt{z^2-3}\right)$ és $\vec{v}(1;1;1)$ két térbeli vektor, a két vektor skaláris szorzata éppen a megoldandó egyenlet bal oldala. A két vektor hossza $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2-27}$ és $|\vec{v}|=\sqrt{3}$. A skaláris szorzat definíciója és az egyenlet szerint:

(1) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-12=\sqrt{x^2+y^2+z^2-27}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\varphi\ .$$

Ha most a $\sqrt{x^2+y^2+z^2-27}=c$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor egyrészt $x^2+y^2+z^2-27>0$ miatt $c>0$, másrészt (1)-ből rendezés után:

(2) $$\frac{c^2+3}{2\cdot\sqrt{3}\cdot c}=\cos\varphi\ .$$

Ebből pedig a $\cos\varphi\leq 1$ alapján ugyanarra az egyenlőtlenségre jutunk, mint a 6. feladat (3) egyenlőtlensége, ezért most is $c=\sqrt{3}$, ebből pedig $x^2+y^2+z^2=30$ következik. Ugyanakkor a 6. feladathoz hasonlóan most is $\varphi=0°$, azaz a vektorok megfelelő koordinátái arányosak, tehát hogy $\frac{\sqrt{x^2-16}}{1}=\frac{\sqrt{y^2-8}}{1}=\frac{\sqrt{z^2-3}}{1}$, vagyis $\sqrt{x^2-16}=\sqrt{y^2-8}=\sqrt{z^2-3}$. Innen könnyen adódik, hogy $y^2=x^2-8$ és $z^2=x^2-13$, ezt az $x^2+y^2+z^2=30$ összefüggésbe helyettesítve $x^2=17$, $y^2=9$ és $z^2=4$. A feladat megoldásai tehát az $x=\pm\sqrt{17};\ y=\pm 3;\ z=\pm 2$ számokból képezhető $(x;\ y;\ z)$ számhármasok.

9. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a $\sqrt{\frac{1}{2}+\sin^2 x}+\sqrt{\frac{5}{4}-\sin^2 y}+\sqrt{1+tg^2 z}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 y+tg^2 z}{2}+\frac{19}{8}$ egyenletet.

Megoldás: egy trigonometrikus azonosság szerint $1-\sin^2 y=\cos^2 y$, ezért az egyenlet a $\sqrt{\frac{1}{2}+\sin^2 x}+\sqrt{\frac{1}{4}+\cos^2 y}+\sqrt{1+tg^2 z}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 y+tg^2 z}{2}+\frac{19}{8}$ alakba írható át. Innen pedig az előzőekben látott módszerrel a feladat könnyen megoldható. Természetesen más úton megoldhatjuk a feladatot, lehet például a bal oldali négyzetgyökös kifejezéseket egy-egy betűvel helyettesíteni.

A megoldás kivitelezését az olvasóra bízzuk.

10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x; y$ valós számokra fennáll a $3x+4y\le 5\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ egyenlőtlenség.

Megoldás: legyenek $\vec{u}(3;\,4)$ és $\vec{v}(x;\,y)$ a derékszögű koordinátarendszer $(x;\,y)$ síkjában fekvő vektorok. Nyilvánvaló, hogy $\vec{u}\cdot\vec{v}=3x+4y$. Ugyanakkor $|\vec{u}|=5$ és $|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

A vektorok skaláris szorzatának definíciója szerint pedig $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\varphi$, így $3x+4y=5\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\varphi$.

Mivel $\cos\varphi\le 1$, ezért az előző egyenletből a $3x+4y\le 5\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ egyenlőtlenség következik, ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.

11. Bizonyítsuk be, hogy, ha a,b,c olyan pozitív valós számok, amelyekre $a+b+c=2$, akkor $\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}<7$. (Róka Sándor ötletéből)

Megoldás: a feltételek miatt a négyzetgyökös kifejezések alatt szereplő számok mind pozitívok.

Tekintsük az $\vec{u}(1;\,1;\,1)$ és $\vec{v}\left(\sqrt{6a+1};\ \sqrt{6b+1};\ \sqrt{6c+1}\right)$ térbeli vektorokat.

A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala a két vektor skaláris szorzata.

A vektorok hossza $|\vec{u}|=\sqrt{3}$ és $|\vec{v}|=\sqrt{6a+6b+6c+3}$, utóbbira az $a+b+c=2$ feltétel miatt $|\vec{v}|=\sqrt{15}$ teljesül. Eszerint $\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}\cdot\cos\varphi$, ahol φ az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok által bezárt szög.

Nyilvánvaló, hogy $\cos\varphi \le 1$, ezért $\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}\cdot\cos\varphi \le \sqrt{45}$. Ugyanakkor $\sqrt{45}<\sqrt{49}$, ebből a $\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}<7$ állítás azonnal adódik.

12. Egy háromszög $a;b;c$-vel jelölt oldalaira fennáll, hogy $a+b\cdot\sqrt{3}+c\cdot\sqrt{5}=2007$ és $a^2+b^2+c^2=447561$. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

<u>Megoldás:</u> tekintsük a háromszög oldalhosszait egy térbeli vektor három koordinátájának, azaz legyen $\vec{u}(a;\, b;\, c)$, legyen továbbá $\vec{v}(1;\, \sqrt{3};\, \sqrt{5})$, ekkor az $a+b\cdot\sqrt{3}+c\cdot\sqrt{5}=2007$ egyenlet bal oldala a két vektor skaláris szorzata. Ezzel $|\vec{u}|=\sqrt{447561}=669$ és $|\vec{v}|=3$.
Látható, hogy $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$, hiszen $669\cdot3=2007$, ez csak akkor állhat fenn, ha a két vektor egyirányú, azaz koordinátáik arányosak.
Eszerint:

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{c}{\sqrt{5}}. \qquad (1)$$

(1)-ből következik, hogy $b=a\cdot\sqrt{3}$ és $c=a\cdot\sqrt{5}$, innen pedig $a^2+3a^2+5a^2=447561$, azaz $a^2=223$ és így $a=\sqrt{223}$. A háromszög oldalhosszai tehát $a=\sqrt{223}$, $b=\sqrt{669}$ és $c=\sqrt{1115}$.
A háromszög szögeinek kiszámításához elegendő az 1; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ oldalú háromszög szögeit kiszámolni, hiszen ez hasonló az eredetihez. Két koszinusztétel felírásából kapjuk a szögek közelítő értékeit: $\alpha=25{,}3°$; $\beta=47{,}9°$; $\gamma=106{,}8°$.

13. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek oldalai $AB=c, BC=a, CA=b$; $A_1B_1=c_1, B_1C_1=a_1, C_1A_1=b_1$. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek akkor és csak akkor hasonlók, ha $\sqrt{a\cdot a_1}+\sqrt{b\cdot b_1}+\sqrt{c\cdot c_1}=\sqrt{(a+b+c)\cdot(a_1+b_1+c_1)}$.
(OKTV II. kategória 93/94/2.)

<u>Megoldás:</u> a két háromszög akkor és csak akkor hasonló, ha a megfelelő oldalak aránya egyenlő, azaz, ha $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$, vagy másként $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_1}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b_1}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c_1}}$.
Legyen $\vec{u}(\sqrt{a};\, \sqrt{b};\, \sqrt{c})$ és $\vec{v}(\sqrt{a_1};\, \sqrt{b_1};\, \sqrt{c_1})$, ahol a két vektor koordinátái a feltételek miatt mind pozitívak. A két vektor akkor és csak akkor egyirányú, tehát $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_1}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b_1}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c_1}}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$. Könnyen látható, hogy $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{a\cdot a_1}+\sqrt{b\cdot b_1}+\sqrt{c\cdot c_1}$ és $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|=\sqrt{(a+b+c)\cdot(a_1+b_1+c_1)}$. Ebből azonnal következik a feladat állítása.

14. Adjuk meg az összes olyan valós számhármast, amelyre a $3x+4y+5z \ge 50$ és $x^2+y^2+z^2=50$ egyszerre teljesül.

<u>Megoldás:</u> legyen $\vec{u}(x;\,y;\,z)$ és $\vec{v}(3;\,4;\,5)$ két térbeli vektor. A felírt egyenletből következik, hogy $|\vec{u}|=\sqrt{50}$, ugyanakkor $|\vec{v}|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}$. A két vektor skaláris szorzata a $3x+4y+5z \ge 50$ egyenlőtlenség bal oldala. A skaláris szorzat definíciója szerint $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\varphi$, ahol φ a két vektor által bezárt szög.
Eszerint $3x+4y+5z=50\cdot\cos\varphi$, mivel azonban $3x+4y+5z \ge 50$ is teljesül, ezért $\cos\varphi \ge 1$.
Nyilvánvaló, hogy $\cos\varphi > 1$ nem lehetséges, így $\cos\varphi=1$. Ebből egyrészt azt kapjuk, hogy a $3x+4y+5z \ge 50$ egyenlőtlenségben az egyenlőség áll fenn, másrészt azt, hogy a két vektor egyirányú, azaz megfelelő koordinátáik aránya állandó, vagyis:

(1) $$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}.$$

Ezt az állandót k-val jelölve $x=3k;\ y=4k;\ z=5k$. Ezzel az $x^2+y^2+z^2=50$ egyenletből azt kapjuk, hogy $k^2=1$.
A $k=1$ értékre $x=3;\ y=4;\ z=5$, ez a számhármas kielégíti a feladatban szereplő mindkét összefüggést. Ha $k=-1$, akkor $x=-3;\ y=-4;\ z=-5$, ez a számhármas nyilván nem megoldása a feladatnak.

15. Adjuk meg az összes olyan valós számhármast, amelyre a $5x+7y+11z \le -195$ és $x^2+y^2+z^2=195$ egyszerre teljesül.

<u>Megoldás:</u> legyen $\vec{u}(x;\,y;\,z)$ és $\vec{v}(5;\,7;\,11)$ két térbeli vektor, a két vektor skaláris szorzata éppen a feladatban szereplő egyenlőtlenség bal oldala. Ez azt jelenti, hogy $\vec{u}\cdot\vec{v} \le -195$.
A vektorok hossza pedig $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{195}$ és $|\vec{v}|=\sqrt{5^2+7^2+11^2}=\sqrt{195}$.
A skaláris szorzat definíciója szerint $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\varphi$, azaz $\vec{u}\cdot\vec{v} \le -195$ alapján $195\cdot\cos\varphi \le -195$, vagyis

(1) $$\cos\varphi \le -1.$$

Nyilvánvaló, hogy (1)-ben csak az egyenlőség állhat fenn, tehát $\cos\varphi=-1$. Ebből következik, hogy $\varphi=180°$, tehát az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok ellentétes irányúak, vagyis az egyik vektor a másik negatív valós számszorosaként állítható elő.
Ekkor a két vektor megfelelő koordinátáinak hányadosa állandó negatív szám. Így

(2) $$\frac{x}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z}{11}=k,$$

ahol $k<0$ valós szám.
(2)-ből következően $x=5k;\ y=7k;\ z=11k$ és így az $x^2+y^2+z^2=195$ egyenlet miatt $k^2=1$.

A feltételek miatt az utóbbi egyenletnek csak a $k = -1$ megoldását vehetjük figyelembe, ebből pedig azonnal adódik, hogy $x = -5;\ y = -7;\ z = -11$. Számolással ellenőrizhető, hogy ez a számhármas a feladatban szereplő mindkét összefüggésnek eleget tesz, behelyettesítéskor az egyenlőtlenségben az egyenlőség esete áll fenn.

16. Oldjuk meg a természetes számokból álló számnégyesek halmazán az $x + y + z = 2t$, $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ egyenletrendszert.

<u>Megoldás:</u> $t = 0$ esetén nyilvánvaló $x = y = z = 0$ kell legyen, ez a számhármas azonban nem elégíti ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ egyenletet. Így csak $t > 0$ lehetséges.
Legyen $\vec{u}(x;\ y;\ z)$ és $\vec{v}(1;\ 1;\ 1)$ két térbeli vektor, a két vektor skaláris szorzata az első egyenlet bal oldala. A két vektor hossza: $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 10$ és $|\vec{v}| = \sqrt{3}$. A vektorok skaláris szorzatának definíciója alapján $10 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\varphi = 2t$, azaz:

(1) $$\cos\varphi = \frac{t}{5 \cdot \sqrt{3}}.$$

Mivel $\cos\varphi \le 1$, ezért (1)-ből következően $t \le 5 \cdot \sqrt{3}$. Eszerint t csak az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 és 8 természetes számok valamelyike lehet.
Egyszerűen belátható, hogy $t = 1$ nem lehetséges, mert az ebből adódó $x + y + z = 2$ egyenletnek csak a $(2;\ 0;\ 0)$ vagy az $(1;\ 1;\ 0)$ számhármasok (és ezek összes permutációi) a megoldásai, ezek azonban nem elégítik ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ egyenletet. Hasonlóképpen láthatjuk be, hogy $t = 2$ és $t = 3$ sem megoldás. Nem lehetséges $t = 4$ sem, mert innen az $x + y + z = 8$ egyenletet kapjuk, és ha az ebben szereplő számok legnagyobbika 8, akkor a másik két szám zérus, az így adódó számhármasok azonban ismét nem megoldásai az $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ egyenletnek.
A $t = 5$ esetén $x + y + z = 10$, ennek megoldása a $(10;\ 0;\ 0)$ számhármas és ez kielégíti az $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ egyenletet is. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $t = 7$ esetén $x + y + z = 14$, az utóbbi egyenlet megoldásai a $(8;\ 6;\ 0)$ számhármasok összes sorrendjei és ezek megoldásai az $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ egyenlet. A $t = 6$ és $t = 8$ számokra nem kapunk megfelelő megoldást.
Az eredeti egyenletrendszer megoldásai tehát a $(10;\ 0;\ 0;\ 5)$ és $(8;\ 6;\ 0;\ 7)$ számnégyesek, ahol a megfelelő számnégyesek első három tagja tetszőlegesen sorba rendezhető, ez összesen 9 megoldás.

17. Oldjuk meg a természetes számokból álló számnégyesek halmazán az $x + y + z = 5t^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9t^2$ egyenletrendszert.

<u>Megoldás:</u> legyenek $\vec{u}(x;\ y;\ z)$ és $\vec{v}(1;1;1)$ térbeli vektorok, skaláris szorzatuk az első egyenlet bal oldala, vagyis $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5t^2$. Az $\vec{u}$ vektor hossza $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, és mivel $t \ge 0$, ezért a második egyenlet szerint $|\vec{u}| = 3t$, a $\vec{v}$ vektor hossza pedig $|\vec{v}| = \sqrt{3}$. A skaláris szorzat definíciója miatt:

(1) $$3t\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\varphi = 5t^2 .$$

Az (1) egyenlet egyik megoldása nyilván $t=0$, ekkor az eredeti egyenletek csak úgy teljesülhetnek, ha az $x; y; z$ természetes számok mindegyike zérus, vagyis az $x=y=z=t=0$ számnégyes az egyenletrendszer egyik megoldása. Ha pedig $t\neq 0$, akkor pozitív egész, így (1)-ből:

(2) $$\cos\varphi = \frac{5t}{3\cdot\sqrt{3}} .$$

Könnyen belátható, hogy ha $t\geq 2$, akkor $\cos\varphi \geq 1$, ezért ez nem lehetséges. Eszerint csak $t=1$ valósulhat meg, ekkor a kiinduló egyenletek $x+y+z=5$ és $x^2+y^2+z^2=9$. Az utóbbiból következik, hogy az $x; y; z$ természetes számok legnagyobbika nem lehet nagyobb 3-nál, legyen ez a legnagyobb szám x. Ha $x=3$, akkor a második egyenletből következően $y=z=0$, de az $x=3;\ y=0;\ z=0$ számhármas nem elégíti ki az első egyenletet, ezért ez nem megoldás. Az $x=2;\ y=2;\ z=1$ számhármas azonban mindkét egyenletet kielégíti. A feladatnak a $t=1$ érték mellett összesen három megoldása van, hiszen a $(2;\ 2;\ 1)$ számok bármelyik permutációja megfelelő. Az $x=y=z=t=0$ számnégyessel együtt ez négy megoldás.

18. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán az $x^4+y^4+z^4=2025$ és $7x^2+11y^2+19z^2=2006$ egyenletekből álló egyenletrendszert.

(dr. Pintér Ferenc ötletéből)

<u>Megoldás:</u> tekintsük az $\vec{u}(x^2;\ y^2;\ z^2)$ és a $\vec{v}(7;\ 11;\ 19)$ vektorokat, a két vektor skaláris szorzata a $7x^2+11y^2+19z^2=2006$ egyenlet bal oldala.
Mivel $|\vec{u}|=\sqrt{x^4+y^4+z^4}=45$ és $|\vec{v}|=\sqrt{7^2+11^2+19^2}=\sqrt{531}$, ezért a két vektor által bezárt szöget φ-vel jelölve $45\cdot\sqrt{531}\cdot\cos\varphi=2006$. Ebből azt kapjuk, hogy $\cos\varphi=\frac{2006}{45\cdot\sqrt{531}}>1$, ez ellentmond a $\cos\varphi$ értelmezésének, ezért az egyenletrendszernek a valós számhármasok halmazán nincs megoldása.

19. Oldjuk meg a valós számok körében az $x\cdot\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\cdot\sqrt{x^2+1}$ egyenletet.

(dr. Pintér Ferenc)

<u>Megoldás:</u> a négyzetgyök értelmezése miatt $-1\leq x\leq 3$.

Tekintsük az $\vec{u}(x;1)$ és a $\vec{v}\left(\sqrt{1+x};\sqrt{3-x}\right)$ vektorokat. Ekkor egyenletünk a következő alakba írható:

(1) $$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|.$$

Az (1) egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok egyirányúak, azaz a megfelelő koordináták aránya állandó. Az $x=0$ nem megoldása az egyenletnek, ezért az arányokat a $\frac{\sqrt{1+x}}{x}=\sqrt{3-x}$ alakba írhatjuk, ahonnan négyzetre emelés és rendezés után kapjuk, hogy $x^3-3x^2+x+1=0$. Ennek az egyenletnek a bal oldala szorzattá alakítható:

(2) $$(x-1)\cdot\left(x^2-2x-1\right)=0.$$

Mivel a $\frac{\sqrt{1+x}}{x}=\sqrt{3-x}$ egyenletből láthatóan $x>0$, ezért a (2) egyenlet gyökei $x_1=1$ és $x_2=1+\sqrt{2}$. Számolással is ellenőrizhető, hogy ezek valóban megoldásai a feladatnak.

20. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $x\cdot\sqrt{1-9x^2}+3x\cdot\sqrt{9-x^2}=3$ egyenletet.

<u>Megoldás:</u> az egyenlet bal oldalán az első négyzetgyök miatt $x^2\le\frac{1}{9}$, ekkor a második négyzetgyök alatti kifejezés pozitív. Eszerint $-\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{3}$. Ugyanakkor a négyzetgyökös kifejezések szorzótényezői miatt $x>0$, így végül a kiszámítandó ismeretlenre vonatkozó feltétel: $0<x\le\frac{1}{3}$.

Tekintsük a következő két vektort: $\vec{u}\left(\sqrt{1-9x^2};3x\right)$ és $\vec{v}\left(x;\sqrt{9-x^2}\right)$, világos, hogy a két vektor skaláris szorzata a megoldandó egyenlet bal oldala. A két vektor hosszára azt kapjuk, hogy $|\vec{u}|=\sqrt{1-9x^2+9x^2}=1$, illetve $|\vec{v}|=\sqrt{x^2+9-x^2}=3$.

Másrészt a skaláris szorzat definíciója szerint $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot\cos\varphi$, így az egyenletből $\cos\varphi=1$, azaz $\varphi=0°$ következik, vagyis az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok egyirányúak, tehát koordinátáik aránya egyenlő. Eszerint:

(1) $$\frac{\sqrt{1-9x^2}}{x}=\frac{3x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Az (1) egyenletből ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy $82x^2 = 9$, amelyből $x^2 = \frac{9}{82}$, illetve $x = \pm\frac{3}{\sqrt{82}}$. Az $0 < x \le \frac{1}{3}$ feltétel szerint az $x = -\frac{3}{\sqrt{82}}$ gyök nem megoldása a feladatnak.

Az $x = \frac{3}{\sqrt{82}}$ megfelel az $0 < x \le \frac{1}{3}$ feltételnek, és behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy kielégíti az eredeti egyenletet, ezért $x = \frac{3}{\sqrt{82}}$ a feladat egyetlen megoldása.

21. Bizonyítsuk be, hogy az $(x+1)\cdot\sqrt{7x-3} - \sqrt{8}\cdot(x-2) = \sqrt{14x^3 - 4x^2 + 25x + 25}$ egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása.

<u>Megoldás:</u> tegyük fel, hogy az egyenletnek van megoldása a valós számok halmazán, és keressük meg a megoldásokat!

Ha x megoldás, akkor az x valós számra teljesül, hogy $7x - 3 \ge 0$, azaz $x \ge \frac{3}{7}$.

Ekkor a $14x^3 - 4x^2 + 25x + 25 = 2x^2 \cdot (7x - 2) + 25x + 25$ alakból láthatóan fennáll az is, hogy $14x^3 - 4x^2 + 25x + 25 > 0$, vagyis az egyenlet bal oldalán álló négyzetgyökös kifejezés értelmezve van a valós számok halmazán.

Definiáljuk az $\vec{u}(x+1;\ -x+2)$ és a $\vec{v}\left(\sqrt{7x-3};\ \sqrt{8}\right)$ vektorokat, ezek skaláris szorzata az egyenlet bal oldala.

A két vektor hossza: $|\vec{u}| = \sqrt{2x^2 - 2x + 5}$ és $|\vec{v}| = \sqrt{7x+5}$. Egyszerű számolással adódik, hogy $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| = \sqrt{14x^3 - 4x^2 + 25x + 25}$, ez pedig éppen az egyenlet jobb oldala.

Eszerint $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$, ez pedig csakis úgy lehetséges, ha a két vektor egyirányú, azaz megfelelő koordinátáik hányadosa állandó. Ebből következik, hogy:

(1) $$\frac{x+1}{\sqrt{7x-3}} = \frac{-x+2}{\sqrt{8}}.$$

Ha a kiinduló egyenletnek van megoldása, akkor (1)-nek is van.

Eddigi feltételeinket módosítanunk kell, mert az (1) egyenletben $7x - 3 > 0$, tehát (1) bal oldala pozitív, így a jobb oldal is az, vagyis teljesülnie kell a $-x + 2 > 0$ egyenlőtlenségnek. Ez azt is jelenti, hogy $\frac{3}{7} < x < 2$.

Az (1) egyenletből négyzetre emelés és rendezés után a

(2) $$7x^3 - 39x^2 + 24x - 20 = 0$$

egyenletet kapjuk. Egyszerű számolással adódik, hogy a (2) egyenlet egyik valós gyöke $x_1 = 5$.

Innen például polinomosztással adódik, hogy $7x^3 - 39x^2 + 24x - 20 = (x-5)\cdot(7x^2 - 4x + 4)$.

A $7x^2 - 4x + 4 = 0$ másodfokú egyenletnek viszont nincs valós megoldása, mert a diszkriminánsa negatív, így (2) egyetlen megoldása $x_1 = 5$. Ez viszont nem teljesíti a $\frac{3}{7} < x < 2$ feltételt, így az eredeti egyenletnek valóban nincs megoldása a valós számok halmazán.

22. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a $\sqrt{5\cdot\left(x^2+2yz\right)}+\sqrt{6\left(y^2+2zx\right)}+\sqrt{5\left(z^2+2xy\right)}=4(x+y+z)$ egyenletet.

(dr. Pintér Ferenc feladata; XII. NMMV, Eger)

<u>Megoldás:</u> az egyenlet jobb oldala miatt $x+y+z \geq 0$. Az egyenlet bal oldala pedig az $\vec{u}\left(\sqrt{5};\ \sqrt{6};\ \sqrt{5}\right)$ és a $\vec{v}\left(\sqrt{x^2+2yz};\ \sqrt{y^2+2zx};\ \sqrt{z^2+2xy}\right)$ vektorok skaláris szorzata, az utóbbi vektor koordinátái a négyzetgyök értelmezése miatt nyilván nemnegatív kifejezések.

Könnyen látható, hogy $|\vec{u}| = 4$ és az $x+y+z \geq 0$ feltétel miatt $|\vec{v}| = \sqrt{(x+y+z)^2} = x+y+z$.

Eszerint az egyenlet egyik oldala az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok skaláris szorzata, a másik oldal pedig ugyanezen két vektor hosszának szorzata. Ez akkor és csakis akkor áll fenn, ha a két vektor által bezárt szögre $\varphi = 0°$, azaz a két vektor egyirányú, és így a koordinátáik arányosak.

Ebből következik, hogy:

(1) $$\frac{x^2+2yz}{5}=\frac{y^2+2zx}{6}=\frac{z^2+2xy}{5}.$$

Az (1) egyenletrendszerből $x^2 - z^2 = 2y\cdot(x-z)$, tehát $x = z$, vagy $x + z = 2y$.

Ha $x = z$, akkor

(2) $$\frac{x^2+2xy}{5}=\frac{y^2+2x}{6}.$$

A (2) egyenletből $4x^2 - 12xy + 5y^2 = 0$ következik, ebből pedig $y = \frac{2}{5}x$, vagy $y = 2x$ adódik.

Az egyenlet megoldásai ekkor az $\left(a;\ \frac{2}{5}a;\ a\right)$ és az $(a;\ 2a;\ a)$ számhármasok, ahol $a \geq 0$, (tetszőleges) valós szám.

Ha pedig $x + z = 2y$, akkor visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

(3) $$\frac{x^2+2y\cdot(2y-x)}{5}=\frac{y^2+2x\cdot(2y-x)}{6}.$$

A (3) egyenletből a műveletek elvégzése és rendezés után kapjuk, hogy $16x^2 - 32xy + 19y^2 = 0$.

Ennek a másodfokú egyenletnek az $x = y = 0$ megoldása, ekkor nyilván $z = 0$ is teljesül.

Más megoldás nincs is, mert ha például $y \neq 0$ volna, akkor a $16x^2 - 32xy + 19y^2 = 0$ egyenletből az $\frac{x}{y} = p$ jelöléssel $16p^2 - 32p + 19 = 0$, ennek a másodfokú egyenletnek azonban negatív a diszkriminánsa, vagyis valós megoldása nincs.

Összegezve: az eredeti egyenlet megoldásai az $\left(a;\ \frac{2}{5}a;\ a\right)$, $(a;\ 2a;\ a)$ és a $(0;\ 0;\ 0)$ számhármasok, ahol $a \geq 0$.