Differenciálegyenletes csemegék középiskolai ízesítéssel

Besenyei Ádám
badam@cs.elte.hu

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Matematikai Intézet, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Rátz László Vándorgyűlés
Gödöllő
2019. 07. 05.

Matematika mindenütt

Mottó:

> *„A természet elmélyült tanulmányozása a matematikai felfedezések legtermékenyebb forrása."*
>
> Joseph Fourier (1768–1830)

- a körülöttünk lévő világ tele van időben változó folyamatokkal: gépkocsi mozgása, időjárás változása, bankszámla egyenlegének vagy tőzsdeárfolyamok alakulása, légszennyezés, járványok vagy rádióhullámok terjedése, népesség változása...
- a folyamatok leírása a matematika nyelvén történik (Galilei)
- cél: modellek, amelyek vizsgálata nem reménytelenül nehéz, tükrözik a valóságot, és segítenek a folyamat megértésében, előrejelzésében, szabályozásában
- eszköz: differenciálegyenletek, közelítő módszerek, számítógép
- kihívás, szórakozás, pénzkeresés

A változás üteme

Tanmese a sebességről – Feynman nyomán

A rendőr megállít egy gyorsan hajtó autóst, és kérdőre vonja.

– *Kérem, Ön óránként* 90 km *sebességgel hajtott.*

– *Ez lehetetlen, hiszen én csak* 7 *perce indultam el. Nevetséges! Hogyan tudtam volna megtenni* 90 km-*t egy óra alatt, mikor még nem is megyek egy órája?!*

– ...

(A történet Richard Feynman (1918–1988) fizikus meséje, a szereplők és az események bárminemű hasonlósága a valósággal pusztán a véletlen műve.)

A türelmes magyarázat

Mit jelent az, hogy a pillanatnyi sebesség 90 km/h?

Ezzel a sebességgel a megtett út ($=$ a távolság időbeli megváltozása):

- 1 óra alatt 90 km
- $1/2$ óra alatt 45 km
- $1/5$ óra alatt 18 km
- $0{,}000277$ óra ($= 1$ másodperc) alatt $0{,}000277 \cdot 90$ ($= 0{,}025$) km

$$\vdots$$

- Δt idő alatt $90 \cdot \Delta t$ km, ahol Δt nagyon kicsi, a másodperc tört része!

A matematikai traffipax

Legyen $x(t)$ időben változó mennyiség: elmozdulás, hőmérséklet, pénz (\$)

A matematikai traffipax

Legyen $x(t)$ időben változó mennyiség: elmozdulás, hőmérséklet, pénz (\$)

- t időpontban $x(t)$ változási üteme $\approx$ matematikai traffipax (Δt kicsi):

$$\boxed{x(t) \text{ változási üteme} \approx \frac{x(t) \text{ megváltozása}}{\text{eltelt idő}} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}$$

(valójában határérték, de a gyakorlatban csak méréseink vannak)

A matematikai traffipax

Legyen $x(t)$ időben változó mennyiség: elmozdulás, hőmérséklet, pénz (\$)

- t időpontban $x(t)$ változási üteme $\approx$ matematikai traffipax (Δt kicsi):

$$\boxed{x(t) \text{ változási üteme} \approx \frac{x(t) \text{ megváltozása}}{\text{eltelt idő}} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}$$

(valójában határérték, de a gyakorlatban csak méréseink vannak)

- ahogy a hétköznapi életben: gyors/lassú változás

mennyiség kis idő alatt	változási ütem előjele és nagysága
nő/csökken (kevés/sok)	$+/-$ (kicsi/nagy)
állandó	0

A matematikai traffipax

Legyen $x(t)$ időben változó mennyiség: elmozdulás, hőmérséklet, pénz (\$)

- t időpontban $x(t)$ változási üteme $\approx$ matematikai traffipax (Δt kicsi):

$$\boxed{x(t) \text{ változási üteme} \approx \frac{x(t) \text{ megváltozása}}{\text{eltelt idő}} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}$$

(valójában határérték, de a gyakorlatban csak méréseink vannak)

- ahogy a hétköznapi életben: gyors/lassú változás

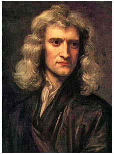
mennyiség kis idő alatt	változási ütem előjele és nagysága
nő/csökken (kevés/sok)	$+/-$ (kicsi/nagy)
állandó	0

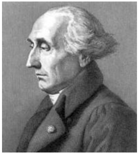
- elnevezés és jelölés: $x(t)$ változási üteme $= x(t)$ deriváltja $= x'(t)$

Minek nevezzelek?

- Isaac Newton (1643–1727): fluxió, $\dot{x}(t)$ (1665, pestisjárvány)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716): differenciál, $\frac{dx}{dt}$ (1684)
- George Berkeley (1685–1783): kritika (1734)

  „De mik ezek a fluxiók? Az elenyésző növekmények sebességei. És mik ezek az elenyésző növekmények? Se nem véges mennyiségek, se nem végtelenül kicsinyek, még csak nem is semmik. Mi mások lennének tehát, mint a kimúlt mennyiségek kísértetei?”
- Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), derivált, $x'(t)$ (1797)



Pénz


AE 77665544 B
E5
UNITED STATES OF AMERICA
AE 77665544 B
100
ONE HUNDRED DOLLARS

A Sosemvolt Bank

Deriv Államban nagy a verseny a bankok között, ezért változatos ajánlatokkal próbálják magukhoz csábítani a leendő ügyfeleiket.
A Sosemvolt Bank például a hagyományos éves kamatozás helyett folytonos kamatozásra tér át, amely szerint a bankszámlán lekötött pénzösszeg növekedési üteme arányos az éppen aktuális összeggel.

A Sosemvolt Bank

Deriv Államban nagy a verseny a bankok között, ezért változatos ajánlatokkal próbálják magukhoz csábítani a leendő ügyfeleiket. A Sosemvolt Bank például a hagyományos éves kamatozás helyett folytonos kamatozásra tér át, amely szerint a bankszámlán lekötött pénzösszeg növekedési üteme arányos az éppen aktuális összeggel.

Matematikai modell:

- az aktuális pénzösszeg a t időpillanatban: $p(t)$
- a folytonos kamatozás arányossági tényezője: r

A Sosemvolt Bank

Deriv Államban nagy a verseny a bankok között, ezért változatos ajánlatokkal próbálják magukhoz csábítani a leendő ügyfeleiket.
A Sosemvolt Bank például a hagyományos éves kamatozás helyett folytonos kamatozásra tér át, amely szerint a bankszámlán lekötött pénzösszeg növekedési üteme arányos az éppen aktuális összeggel.

Matematikai modell:

- az aktuális pénzösszeg a t időpillanatban: $p(t)$
- a folytonos kamatozás arányossági tényezője: r

A bank ajánlata matematikailag = differenciálegyenlet

$$\boxed{p'(t) = r \cdot p(t)}$$

Kitérő: $x'(t) = r \cdot x(t)$ megoldásai

Heurisztikusan:

Precízen:

Kitérő: $x'(t) = r \cdot x(t)$ megoldásai

Heurisztikusan: ha $x'(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} x'(t) &= r \cdot x(t) \\ \frac{x'(t)}{x(t)} &= r \\ (\log|x(t)|)' &= r \\ \log|x(t)| &= rt + c \\ x(t) &= \pm e^c \cdot e^{rt} \\ x(t) &= C \cdot e^{rt} \end{aligned}$$

Precízen:

Kitérő: $x'(t) = r \cdot x(t)$ megoldásai

Heurisztikusan: ha $x'(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} x'(t) &= r \cdot x(t) \\ \frac{x'(t)}{x(t)} &= r \\ (\log|x(t)|)' &= r \\ \log|x(t)| &= rt + c \\ x(t) &= \pm e^c \cdot e^{rt} \\ x(t) &= C \cdot e^{rt} \end{aligned}$$

Precízen: e^{-rt} integráló tényező

$$\begin{aligned} x'(t) &= r \cdot x(t) \\ x'(t) - rx(t) &= 0 \\ x'(t)e^{-rt} - re^{-rt}x(t) &= 0 \\ \left(x(t)e^{-rt}\right)' &= 0 \\ x(t)e^{-rt} &= C \\ x(t) &= C \cdot e^{rt} \end{aligned}$$

Kitérő: $x'(t) = r \cdot x(t)$ megoldásai

Heurisztikusan: ha $x'(t) \neq 0$

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= r \cdot x(t) \\
\frac{x'(t)}{x(t)} &= r \\
(\log|x(t)|)' &= r \\
\log|x(t)| &= rt + c \\
x(t) &= \pm e^c \cdot e^{rt} \\
x(t) &= C \cdot e^{rt}
\end{aligned}
$$

Precízen: e^{-rt} integráló tényező

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= r \cdot x(t) \\
x'(t) - rx(t) &= 0 \\
x'(t)e^{-rt} - re^{-rt}x(t) &= 0 \\
\left(x(t)e^{-rt}\right)' &= 0 \\
x(t)e^{-rt} &= C \\
x(t) &= C \cdot e^{rt}
\end{aligned}
$$

Tétel.

Az $x'(t) = r \cdot x(t)$ differenciálegyenlet összes megoldását az $x(t) = C \cdot e^{rt}$ alakú függvények adják, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Kitérő: $x'(t) = r \cdot x(t)$ megoldásai

Heurisztikusan: ha $x'(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} x'(t) &= r \cdot x(t) \\ \frac{x'(t)}{x(t)} &= r \\ (\log|x(t)|)' &= r \\ \log|x(t)| &= rt + c \\ x(t) &= \pm e^c \cdot e^{rt} \\ x(t) &= C \cdot e^{rt} \end{aligned}$$

Precízen: e^{-rt} integráló tényező

$$\begin{aligned} x'(t) &= r \cdot x(t) \\ x'(t) - rx(t) &= 0 \\ x'(t)e^{-rt} - re^{-rt}x(t) &= 0 \\ \left(x(t)e^{-rt}\right)' &= 0 \\ x(t)e^{-rt} &= C \\ x(t) &= C \cdot e^{rt} \end{aligned}$$

Tétel.

Az $x'(t) = r \cdot x(t)$ differenciálegyenlet összes megoldását az $x(t) = C \cdot e^{rt}$ alakú függvények adják, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Észrevétel: $x(0) = C$, így a megoldások $x(t) = x_0 \cdot e^{rt}$ alakban is írhatók.

A Sosemvolt Bank

A matematikus Deriv Álmost meggyőzte a Sosemvolt Bank ajánlata,
és p_0 fitying kezdőösszeget helyezett el az újonnan nyitott bankszámlájára.

A Sosemvolt Bank

A matematikus Deriv Álmost meggyőzte a Sosemvolt Bank ajánlata, és p_0 fitying kezdőösszeget helyezett el az újonnan nyitott bankszámlájára.

A matematikai modell = kezdetiérték-feladat

$$\boxed{\begin{aligned} p'(t) &= r \cdot p(t) \\ p(0) &= p_0 \end{aligned}}$$

A Sosemvolt Bank

A matematikus Deriv Álmost meggyőzte a Sosemvolt Bank ajánlata, és p_0 fitying kezdőösszeget helyezett el az újonnan nyitott bankszámlájára.

A matematikai modell = kezdetiérték-feladat

$$\boxed{\begin{aligned} p'(t) &= r \cdot p(t) \\ p(0) &= p_0 \end{aligned}}$$

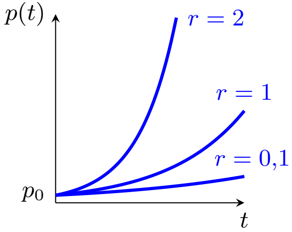
Exponenciális növekedés

A pénz időegység alatt e^r-szereződik:

$$p(t) = p_0 e^{rt} \quad (e \approx 2{,}718)$$

Kétszereződési idő:

$$T = \frac{\ln 2}{r} \approx \frac{70}{100r}$$



A Sosemvolt Bank

A matematikus Deriv Álmost meggyőzte a Sosemvolt Bank ajánlata, és p_0 fitying kezdőösszeget helyezett el az újonnan nyitott bankszámlájára.

A matematikai modell = kezdetiérték-feladat

$$\boxed{\begin{aligned} p'(t) &= r \cdot p(t) \\ p(0) &= p_0 \end{aligned}}$$

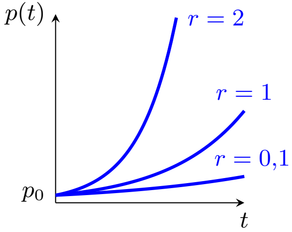
Exponenciális növekedés

A pénz időegység alatt e^r-szereződik:

$$p(t) = p_0 e^{rt} \quad (e \approx 2{,}718)$$

Kétszereződési idő:

$$T = \frac{\ln 2}{r} \approx \frac{70}{100r} \approx \frac{72}{100r} \text{ („72-es szabály”)}$$



A Sosemvolt Bank

Összetettebb modell: folytonos kamatozás + állandó ütemű pénzköltés
Matematikai leírás: időegységenként k fitying folytonos pénzköltés

A Sosemvolt Bank

Összetettebb modell: folytonos kamatozás + állandó ütemű pénzköltés
Matematikai leírás: időegységenként k fitying folytonos pénzköltés

A kamatozás differenciálegyenlete

$$\boxed{p'(t) = r \cdot p(t) - k}$$

A Sosemvolt Bank

Összetettebb modell: folytonos kamatozás + állandó ütemű pénzköltés
Matematikai leírás: időegységenként k fitying folytonos pénzköltés

A kamatozás differenciálegyenlete

$$\boxed{p'(t) = r \cdot p(t) - k} \quad \xleftrightarrow{P(t)=p(t)-\frac{k}{r}} \quad P'(t) = r \cdot P(t)$$

A Sosemvolt Bank

Összetettebb modell: folytonos kamatozás + állandó ütemű pénzköltés
Matematikai leírás: időegységenként k fitying folytonos pénzköltés

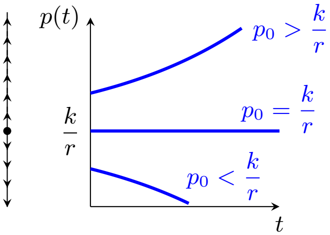
A kamatozás differenciálegyenlete

$$\boxed{p'(t) = r \cdot p(t) - k} \quad \xleftrightarrow{P(t)=p(t)-\frac{k}{r}} \quad P'(t) = r \cdot P(t)$$

Eltérő kimenetelek

$$p(t) = \frac{k}{r} + e^{rt}\left(p_0 - \frac{k}{r}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{növekedés,} & \text{ha } p_0 > \frac{k}{r} \\ \text{egyensúly,} & \text{ha } p_0 = \frac{k}{r} \\ \text{csőd,} & \text{ha } p_0 < \frac{k}{r} \end{cases}$$



Kitérő: geometriai szemlélet

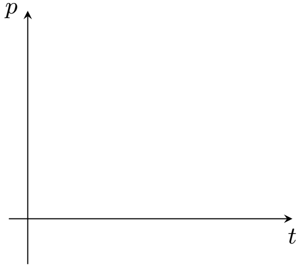
Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$
Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg}\alpha$	α	hol?



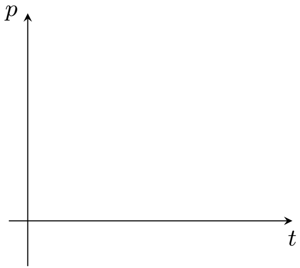
Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$

Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg} \alpha$	α	hol?
0	0°	$p = 2$



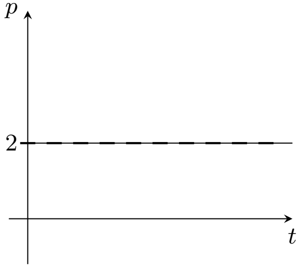
Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$

Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg}\alpha$	α	hol?
0	0°	$p = 2$



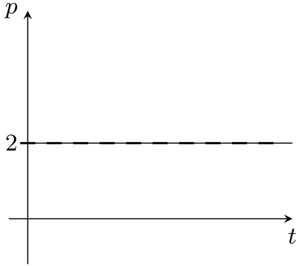
Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$

Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg} \alpha$	α	hol?
0	0°	$p = 2$
1	45°	$p = 4$



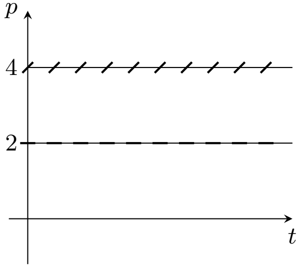
Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$

Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg}\alpha$	α	hol?
0	0°	$p = 2$
1	45°	$p = 4$



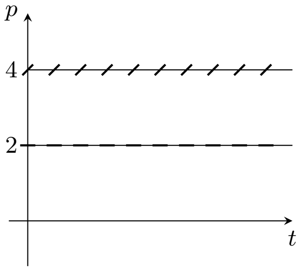
Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$

Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg}\alpha$	α	hol?
0	0°	$p = 2$
1	45°	$p = 4$
-1	-45°	$p = 0$



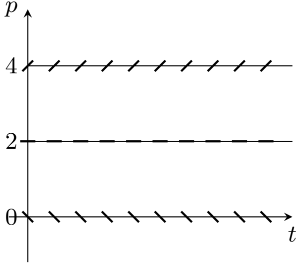
Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$

Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg}\alpha$	α	hol?
0	0°	$p = 2$
1	45°	$p = 4$
-1	-45°	$p = 0$



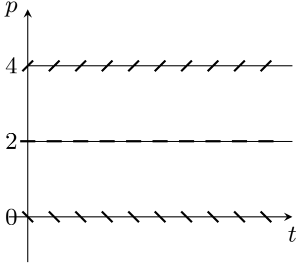
Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$

Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg} \alpha$	α	hol?
0	$0°$	$p = 2$
1	$45°$	$p = 4$
-1	$-45°$	$p = 0$
$1/2$	$26{,}5°$	$p = 3$

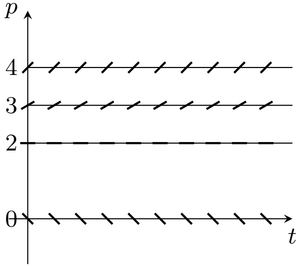


Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$
Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg} \alpha$	α	hol?
0	0°	$p = 2$
1	45°	$p = 4$
-1	-45°	$p = 0$
$1/2$	$26{,}5^\circ$	$p = 3$



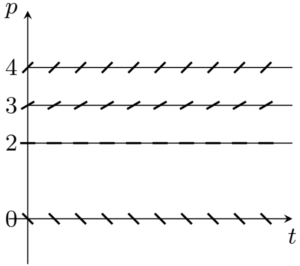
Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$

Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg} \alpha$	α	hol?
0	$0°$	$p = 2$
1	$45°$	$p = 4$
-1	$-45°$	$p = 0$
$1/2$	$26{,}5°$	$p = 3$
$-1/2$	$-26{,}5°$	$p = 1$



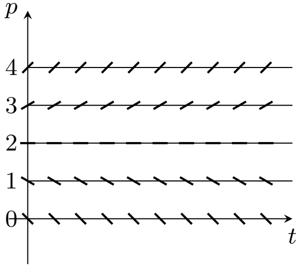
Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$

Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg}\alpha$	α	hol?
0	0°	$p = 2$
1	45°	$p = 4$
-1	-45°	$p = 0$
$1/2$	$26{,}5^\circ$	$p = 3$
$-1/2$	$-26{,}5^\circ$	$p = 1$



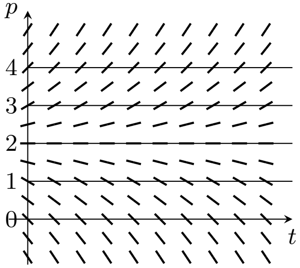
Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$

Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg}\alpha$	α	hol?
0	$0°$	$p = 2$
1	$45°$	$p = 4$
-1	$-45°$	$p = 0$
$1/2$	$26{,}5°$	$p = 3$
$-1/2$	$-26{,}5°$	$p = 1$



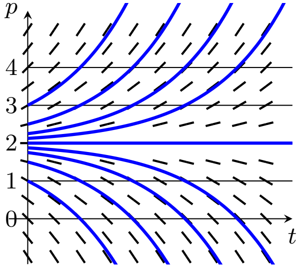
Kitérő: geometriai szemlélet

Analitikus	Geometriai
derivált	meredekség
differenciálegyenlet	iránymező
megoldásfüggvények	megoldásgrafikonok (integrálgörbék)

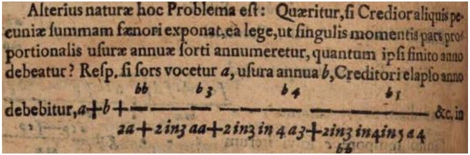
Példa: $p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 1$

Kérdés: a (t, p) sík mely pontjaiban m a megoldásgrafikonok meredeksége?

$m = \operatorname{tg}\alpha$	α	hol?
0	$0°$	$p = 2$
1	$45°$	$p = 4$
-1	$-45°$	$p = 0$
$1/2$	$26{,}5°$	$p = 3$
$-1/2$	$-26{,}5°$	$p = 1$



A Sosemvolt Bank és Bernoulli



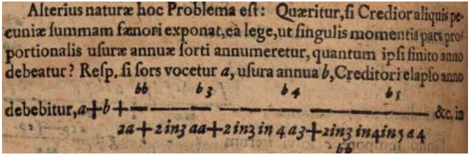
Alterius naturæ hoc Problema eſt: Quæritur, ſi Credior aliquis pecuniæ ſummam fænori exponat, ea lege, ut ſingulis momentis pars proportionalis uſuræ annuæ ſorti annumeretur, quantum ipſi finito anno debeatur? Reſp. ſi ſors vocetur a, uſura annua b, Creditori elapſo anno debebitur, $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2\,in\,3\,aa}+\frac{b^4}{2\,in\,3\,in\,4\,a^3}+\frac{b^5}{2\,in\,3\,in\,4\,in\,5\,a^4}$ &c. in

Jacob Bernoulli (1654–1705), 1690.

Bernoulli problémája

„Mekkora lesz egy év elteltével a befektetett pénzösszeg, ha minden pillanatban az éves kamatláb arányos részével kamatozik?”

A Sosemvolt Bank és Bernoulli


Alterius naturæ hoc Problema eſt: Quæritur, ſi Creditor aliquis pecuniæ ſummam fænori exponat, eâ lege, ut ſingulis momentis pars proportionalis uſuræ annuæ ſorti annumeretur, quantum ipſi finito anno debeatur? Reſp. ſi ſors vocetur a, uſura annua b, Creditori elapſo anno debebitur, $a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b3}{2 in 3 aa} + \frac{b4}{2 in 3 in 4 a3} + \frac{b5}{2 in 3 in 4 in 5 a4}$ &c. in

Jacob Bernoulli (1654–1705), 1690.

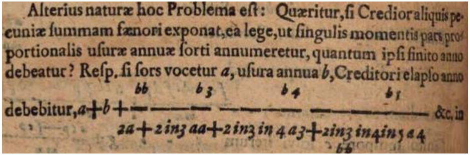
Bernoulli problémája

„Mekkora lesz egy év elteltével a befektetett pénzösszeg, ha minden pillanatban az éves kamatláb arányos részével kamatozik?”

Modern megfogalmazásban

Éves kamatfizetés mellett: kamatláb $= r$
Kamatfizetés $\frac{1}{n}$ évente: kamatláb $= \frac{r}{n}$
Pénz egy év múlva: $p_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty}$?

A Sosemvolt Bank és Bernoulli



Alterius naturæ hoc Problema eſt: Quæritur, ſi Creditor aliquis pe-
cuniæ ſummam fœnori exponat, eà lege, ut ſingulis momentis pars pro-
portionalis uſuræ annuæ ſorti annumeretur, quantum ipſi finito anno
debeatur? Reſp. ſi ſors vocetur a, uſura annua b, Creditori elapſo anno
debebitur, $a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2in3aa} + \frac{b^4}{2in3in4a^3} + \frac{b^5}{2in3in4in5a^4}$ &c. in

Jacob Bernoulli (1654–1705), 1690.

Bernoulli problémája

„Mekkora lesz egy év elteltével a befektetett pénzösszeg, ha minden pillanatban az éves kamatláb arányos részével kamatozik?”

Modern megfogalmazásban

Éves kamatfizetés mellett: kamatláb $= r$

Kamatfizetés $\frac{1}{n}$ évente: kamatláb $= \frac{r}{n}$

Pénz egy év múlva: $p_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} p_0 e^r$

Nyomozás

Valamikor a viktoriánus kori Londonban. . .

Egy éjjel a híres színész, Archibald Coolbody feleségét holtan találják otthonában. Mellette a férj, kezében a gyilkos fegyver. A Scotland Yard felügyelője már szinte le is zárná az ügyet, ám hajnali 1 órakor beviharzik Sherlock Holmes, és az alábbi beszélgetés zajlik le közöttük.

Felügyelő: *Mr Holmes, önnek semmi dolga nincs már itt, az ügy teljesen egyértelmű. A férj kezében volt a fegyver, ő az elkövető.*

Holmes: *Csak ne olyan hevesen, felügyelő úr! Megmérte a halottkém a holttest hőmérsékletét?*

Felügyelő: *Természetesen. Pontban éjfélkor a test* 33°C*-os volt.*

Ekkor Holmes előkapta kabátjából a hőmérőjét, és megvizsgálta a testet.

Holmes: *Hmm. Most* 31°C*-os; és látja, a szoba hőmérője* 20°C*-ot mutat. A halál fél* 11 *körül állt be, márpedig akkor Coolbody még Hamletet játszotta a Queen's Theatre-ben, ahogy minden este. Nem ő az elkövető.*

Hogyan állapította meg Sherlock Holmes, hogy mikor hunyt el az áldozat?

Lehűlés diszkréten és folytonosan

Newton megfigyelése (1701, fémek lehűlése, hőmérsékleti skála):

the Heat which the Iron loſes in a given time, is as the whole Heat of the Iron. Therefore if the Times of cooling are taken equal, the Heats will be in a Geometrical Ratio, and therefore are eaſily found by a Table of Logarithms.

Lehűlés diszkréten és folytonosan

Newton megfigyelése (1701, fémek lehűlése, hőmérsékleti skála):

> the Heat which the Iron lofes in a given time, is as the whole Heat of the Iron. Therefore if the Times of cooling are taken equal, the Heats will be in a Geometrical Ratio, and therefore are eafily found by a Table of Logarithms.

Newton lehűlési törvénye mértani sorozattal

A hőmérséklet-különbség egyenlő idők alatt ugyanannyiad részére csökken:

$$\boxed{T_{\text{test}}(n+1) - T_{\text{közeg}} = q(T_{\text{test}}(n) - T_{\text{közeg}})}$$

Lehűlés diszkréten és folytonosan

Newton megfigyelése (1701, fémek lehűlése, hőmérsékleti skála):

> the Heat which the Iron lofes in a given time, is as the whole Heat of the Iron. Therefore if the Times of cooling are taken equal, the Heats will be in a Geometrical Ratio, and therefore are eafily found by a Table of Logarithms.

Newton lehűlési törvénye mértani sorozattal

A hőmérséklet-különbség egyenlő idők alatt ugyanannyiad részére csökken:

$$\boxed{T_{\text{test}}(n+1) - T_{\text{közeg}} = q(T_{\text{test}}(n) - T_{\text{közeg}})}$$

Newton lehűlési törvénye differenciálegyenlettel

A lehűlés üteme arányos a test és a közeg hőmérsékletének különbségével:

$$\boxed{(T_{\text{test}}(t) - T_{\text{közeg}})' = -k(T_{\text{test}}(t) - T_{\text{közeg}})}$$

Lehűlés diszkréten és folytonosan

Newton megfigyelése (1701, fémek lehűlése, hőmérsékleti skála):

> the Heat which the Iron lofes in a given time, is as the whole Heat of the Iron. Therefore if the Times of cooling are taken equal, the Heats will be in a Geometrical Ratio, and therefore are eafily found by a Table of Logarithms.

Newton lehűlési törvénye mértani sorozattal

A hőmérséklet-különbség egyenlő idők alatt ugyanannyiad részére csökken:

$$\boxed{T_{\text{test}}(n+1) - T_{\text{közeg}} = q(T_{\text{test}}(n) - T_{\text{közeg}})}$$

Newton lehűlési törvénye differenciálegyenlettel

A lehűlés üteme arányos a test és a közeg hőmérsékletének különbségével:

$$\boxed{(T_{\text{test}}(t) - T_{\text{közeg}})' = -k(T_{\text{test}}(t) - T_{\text{közeg}})}$$

$\Longrightarrow$ óránként $\frac{11}{13}$-ára csökken, így a test 22:30 körül volt $36{,}5^\circ$C-os

Exponenciális csökkenés itt-ott

Fontos alkalmazás:

- Hogyan állapíthatjuk meg egy régészeti lelet életkorát?
  - szénizotópos kormeghatározás (múmiák)
  - ^{14}C felezési ideje 5730 év
  - Willard Libby (1908–1980), 1949, Nobel-díj (1960)

- Hogyan leplezzünk le hamis festményeket?
  - Han van Meegeren (1889–1947) képhamisításai

Exponenciális csökkenés itt-ott

Fontos alkalmazás:

- Hogyan állapíthatjuk meg egy régészeti lelet életkorát?
  - szénizotópos kormeghatározás (múmiák)
  - ^{14}C felezési ideje 5730 év
  - Willard Libby (1908–1980), 1949, Nobel-díj (1960)

- Hogyan leplezzünk le hamis festményeket?
  - Han van Meegeren (1889–1947) képhamisításai

Tréfás alkalmazás:

- Mikor vegyük ki a hűtőből a bambit, ha adott hőfokon szeretnénk elfogyasztani?
- Mikor tegyük a tejet a kávéba, ha adott idő múlva a lehető legmelegebben szeretnénk meginni?

Szerelem

Mese Dalmáról és az udvarlóiról

Deriv Állam királyának egyetlen lánya, **Dacos Dalma** igen fura viselkedésű:

- minél inkább szereti valaki Dalmát, ő annál kevésbé szereti az illetőt;
- minél kevésbé szereti valaki Dalmát, ő annál inkább szereti az illetőt.

A király egy napon eldöntötte, hogy ideje férjhez adnia a lányát, azonban Dalmának egyszerre több lovag udvarlója is akadt (köztük egy testvérpár):

Mese Dalmáról és az udvarlóiról

Deriv Állam királyának egyetlen lánya, **Dacos Dalma** igen fura viselkedésű:

- minél inkább szereti valaki Dalmát, ő annál kevésbé szereti az illetőt;
- minél kevésbé szereti valaki Dalmát, ő annál inkább szereti az illetőt.

A király egy napon eldöntötte, hogy ideje férjhez adnia a lányát, azonban Dalmának egyszerre több lovag udvarlója is akadt (köztük egy testvérpár):

Normál Norman, aki teljesen szokványosan viselkedik;

Furi Feri, aki Dalmához hasonlóan eléggé fura figura;

Kedély Kenéz, aki szokványos, de hangulatai kissé befolyásolják;

Kedély Kende, aki szokványos, de hangulatai erősen hatnak rá.

A király nem tudta, mitévő legyen, ezért tüstént hívatta Deriv Álmost, az udvari matematikust, hogy segítsen a tökéletes lovag kiválasztásában.
Mit tanácsolhatott a királynak az udvari matematikus?
Melyik lovaghoz érdemes feleségül adnia egyetlen lányát?

Dalma és a lovagok

Legyen $x(t)$, $y(t)$ Dalma és a lovag találkozását követő t időpillanatban az egymás iránti érzelmük mértéke:

- ha $x(t) > 0$, akkor a t időpontban Dalma szereti a lovagot és minél nagyobb $x(t)$, annál inkább
- ha $x(t) < 0$, akkor Dalma ellenszenvvel viszonyul a lovaghoz
- hasonló a jelentése $y(t)$-nek Dalma felé

Dalma és a lovagok

Legyen $x(t)$, $y(t)$ Dalma és a lovag találkozását követő t időpillanatban az egymás iránti érzelmük mértéke:

- ha $x(t) > 0$, akkor a t időpontban Dalma szereti a lovagot és minél nagyobb $x(t)$, annál inkább
- ha $x(t) < 0$, akkor Dalma ellenszenvvel viszonyul a lovaghoz
- hasonló a jelentése $y(t)$-nek Dalma felé

Egyszerű szerelmi modell

Két differenciálegyenletből álló rendszer, ahol a, b, c és d paraméterek:

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}}$$

Dalma és a lovagok

Legyen $x(t)$, $y(t)$ Dalma és a lovag találkozását követő t időpillanatban az egymás iránti érzelmük mértéke:

- ha $x(t) > 0$, akkor a t időpontban Dalma szereti a lovagot és minél nagyobb $x(t)$, annál inkább
- ha $x(t) < 0$, akkor Dalma ellenszenvvel viszonyul a lovaghoz
- hasonló a jelentése $y(t)$-nek Dalma felé

Egyszerű szerelmi modell

Két differenciálegyenletből álló rendszer, ahol a, b, c és d paraméterek:

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}}$$

Képletek helyett az $(x(t), y(t))$ görbék ábrázolása a síkon (= fáziskép).
(Programok: Maple, Matlab, Mathematica, Wolfram Alpha, Winplot...)

Dalma és Normál Norman

Egyszerű modell:

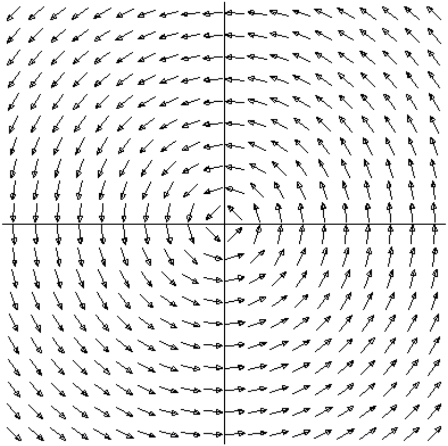
$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{aligned}}$$

Dalma és Normál Norman

Egyszerű modell:

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{aligned}}$$

Fáziskép:

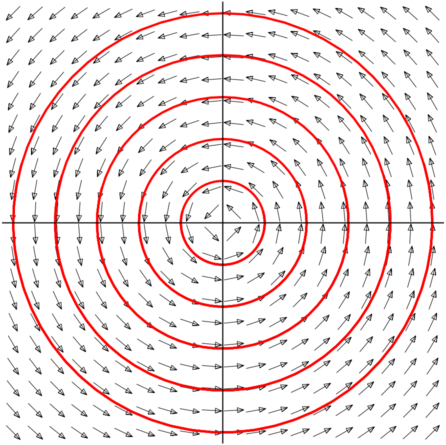


Dalma és Normál Norman

Egyszerű modell:

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{aligned}}$$

Fázikép:



Centrum

Kitérő: Valóban körvonalak? Tényleg periodikus?

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) && (1) \\ y'(t) &= x(t) && (2) \end{aligned}}$$

Matematikailag:

Fizikailag:

Kitérő: Valóban körvonalak? Tényleg periodikus?

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (1) \\ (2) \end{aligned}$$

Matematikailag:

$$+\begin{cases} (1) \cdot x(t) \\ (2) \cdot y(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(x^2(t) + y^2(t)\right)' = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2(t) + y^2(t) = \text{állandó}$$

Fizikailag:

Kitérő: Valóban körvonalak? Tényleg periodikus?

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{aligned}} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Matematikailag:

$$+\begin{cases} (1)\cdot x(t) \\ (2)\cdot y(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(x^2(t) + y^2(t)\right)' = 0$$

$$\Downarrow$$

$x^2(t) + y^2(t) =$ állandó

Fizikailag:

$y(t)$ kitérés:

$y'(t) = x(t)$ sebesség

$y''(t) = x'(t)$ gyorsulás

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y''(t) = -y(t)}$$

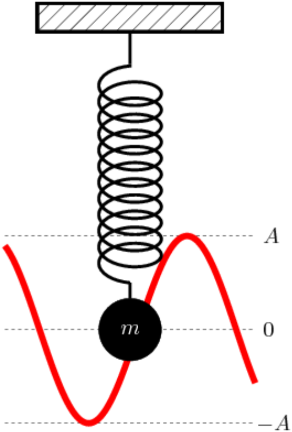
$$\Downarrow$$

visszatérítő erő $\sim$ kitérés

$$\Downarrow$$

harmonikus rezgés

Kitérő: Harmonikus rezgőmozgás



$$x''(t) = -\omega^2 x(t) \quad \Longrightarrow \quad x(t) = A\sin(wt + \varphi)$$

Dalma és Furi Feri

Egyszerű modell:

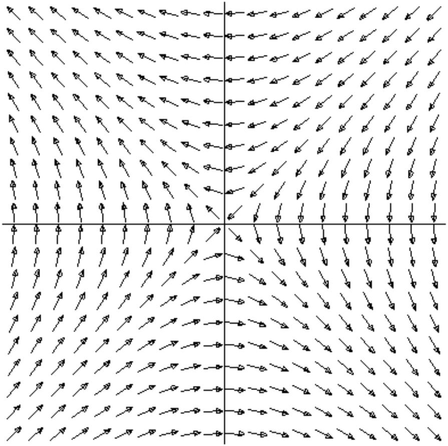
$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= -x(t) \end{aligned}}$$

Dalma és Furi Feri

Egyszerű modell:

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= -x(t) \end{aligned}}$$

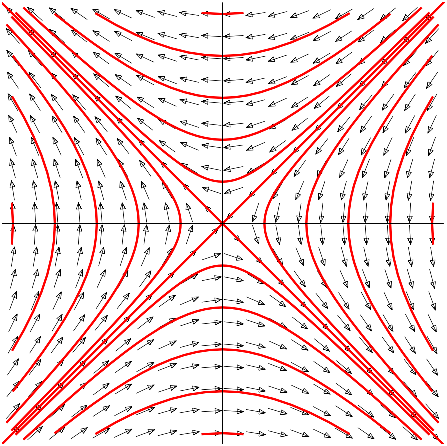
Fáziskép:



Egyszerű modell:

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= -x(t) \end{aligned}}$$

Fázikép:



Nyereg

Dalma és Kedély Kenéz

Egyszerű modell:

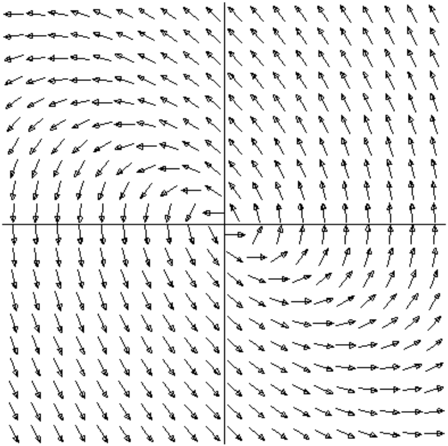
$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \end{aligned}}$$

Dalma és Kedély Kenéz

Egyszerű modell:

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \end{aligned}}$$

Fázikép:

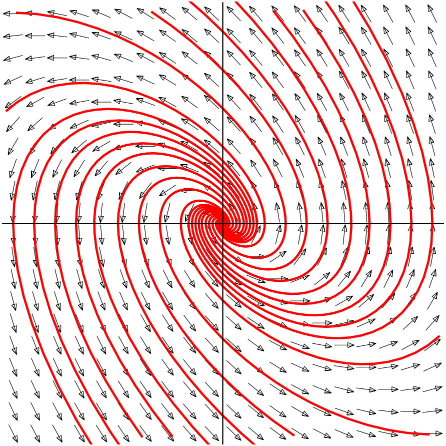


Dalma és Kedély Kenéz

Egyszerű modell:

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \end{aligned}}$$

Fázikép:



Fókusz

Dalma és Kedély Kende

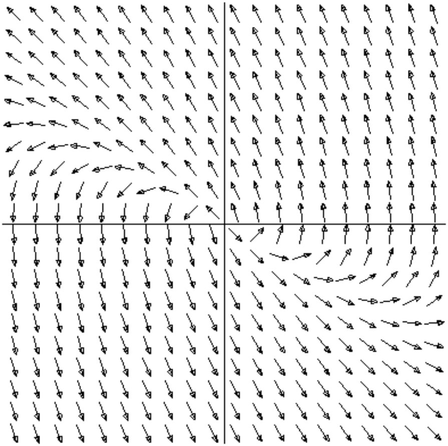
Egyszerű modell:

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2y(t) \end{aligned}}$$

Egyszerű modell:

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2y(t) \end{aligned}}$$

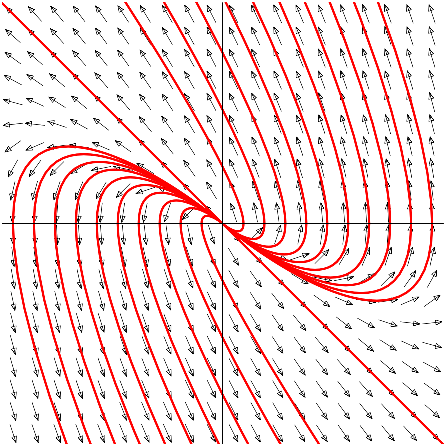
Fázisképp:



Egyszerű modell:

$$x'(t) = -y(t)$$
$$y'(t) = x(t) + 2y(t)$$

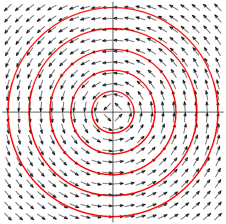
Fáziskép:



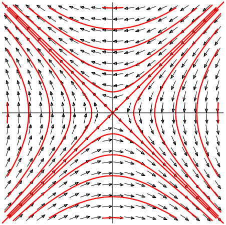
Csomó

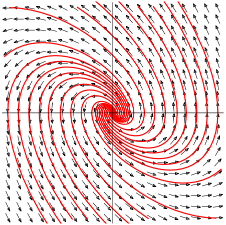
Kapcsolatok kavalkádja

Normál Norman →

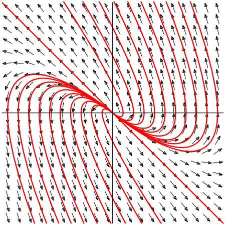


Furi Feri →





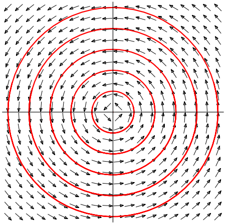
← Kedély Kenéz



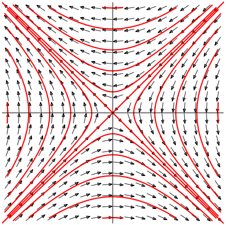
← Kedély Kende

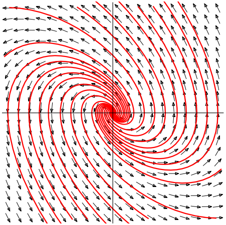
Kapcsolatok kavalkádja

Normál Norman →

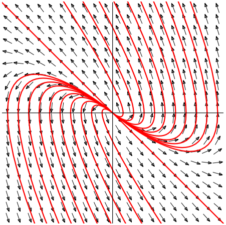


Furi Feri →





← Kedély Kenéz



← Kedély Kende

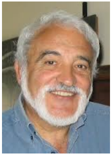
Deriv Álmos tanácsa:
Dalma, válaszd Normál Normant! (Az ellentétek vonzzák egymást?)

Kapcsolatok kavalkádja

További alkalmazások:

- Francesco Petrarca (1304–1374) és Laura de Noves (1310–1348): költői ihlet is befolyásol, Sergio Rinaldi (1998)
- ragadozó és zsákmány + halászat/vadászat:
  Alfred James Lotka (1880–1949), kémiai reakciók (1910)
  Vito Volterra (1860–1940), cápák az Adriai-tengerben (1926)
- harci modellek (hagyományos, gerilla, vegyes):
  Frederick William Lanchester (1868–1946), I. világháború (1916)

Összetettebb modell: késleltetés (reakcióidő)

Kitekintés

Hol fordulnak elő differenciálegyenletek?

légszennyezés terjedése
vulkáni por, radioaktív részecskék

szabályozási feladatok
landolás, rakéták, pénzköltés és megtakarítás

járványok terjedése
fertőzöttek, gyógyultak és fertőzhetők száma, hálózatokon is

piaci és tőzsdei folyamatok
Black–Scholes-egyenlet

hullámterjedés
Maxwell-egyenletek, fényterjedés, zene, mobiltelefon

levegő vagy folyadékok áramlása
Navier–Stokes-egyenletek

Olvasnivalók

- Besenyei Ádám: A királylány és a lovagok, KöMaL Ankét, 2017. október 31. http://abesenyei.web.elte.hu/publications/kiralylany.pdf
- Besenyei Ádám: Sherlock Holmes és a Coolbody eset, KöMaL Ankét, 2018. október 30. http://abesenyei.web.elte.hu/publications/coolbody.pdf
- Besenyei Ádám – Bodó Ágnes: Hálózatok, járványok és a változás egyenletei, Természet Világa, 148. évfolyam, 9. szám, 2017. szeptember, 395–399. http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/tv2017/tv1709/besenyei.html
- Besenyei Ádám – Csomós Petra: A gyorshajtástól az időjárásig – kalandok az alkalmazott matematikában, Természet Világa, 148. évfolyam, 8. szám, 2017. augusztus, 346–351. http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/tv2017/tv1708/besenyei.html
- Besenyei Ádám – Csomós Petra: Pillangók, százszorszépek és szerelem – avagy egy alkalmazott matematikus mindennapjai, Kutatók Éjszakája, 2016. szeptember 30. http://abesenyei.web.elte.hu/publications/pillangok.pdf
- Besenyei Ádám – Csomós Petra: Tavirózsák, cápák és gyerekek – avagy népességnövekedés matematikus szemmel, Kutatók Éjszakája, 2017. szeptember 29. http://abesenyei.web.elte.hu/publications/tavirozsak.pdf
- Képek forrása: http://wikipedia.org

Kö$\int$zönöm a φgyelmet!