A Titu-lemma

Győry Ákos
Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

Az alábbi feladatsort jórészt az 53. Rátz László Vándorgyűlésen elhangzott anyagból állítottam össze, néhány feladattal kiegészítettem, néhol pedig új bizonyításokkal bővítettem.

A címben szereplő lemma Titu Andreescu nevéhez kötődik (az amerikai matematikai olimpiai csapat felkészítője), de egyes szakirodalmak Bergström-egyenlőtlenségként hivatkoznak rá. Ennek az az oka, hogy Harald Bergström (svéd matematikus) 1949-ben az összefüggést már publikálta, csak valószínűleg feledésbe merült, így újra felfedezték. Hazánkban a Titu-lemma elnevezés honosodott meg, ezért én is így fogom említeni, és a levezetésekben használni fogom a külföldi szakirodalom rá használatos rövidítését: T_2 (ejtsd: titu). Ugyan az állítás gyorsan adódik a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenségből (ennek a megmutatását az Olvasóra bízom), mégis kiemelt fontosságúnak gondolom, hiszen bizonyos szituációkban annál sokkal könnyebb a használata.

Az áttekinthetőség kedvéért a megoldásokat a ■ szimbólum zárja le; a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségre pedig így hivatkozom: $A \geq G$.

A feladatok zömét idegen nyelven találtam meg az interneten. Hogy ezek a feladatok eredetileg kitől, honnan származnak, az internetes források alapján adtam meg. Az anyagot diákszemmel Bodolai Előd tanítványom nézte át, ezúton is köszönöm szépen a munkáját!

A Titu-lemma legegyszerűbb alakja a következő:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}\,,$$

ahol $a, b > 0$; $x, y \in \mathbb{R}$, és „=” $\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

Általánosan:

$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n}\geq\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\,, \tag{T_2}$$

ahol $a_1, a_2, \ldots a_n > 0$; $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, és „=” $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\ldots=\dfrac{x_n}{a_n}$.

0. feladat. Igazoljuk a Titu-lemmát.

Megoldás. Okoskodjunk a törtek darabszáma szerinti teljes indukcióval. Két tört esetén:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}\Leftrightarrow(xb-ya)^2\geq 0\,,$$

és „=” $\Leftrightarrow xb=ya\Leftrightarrow\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$, vagyis teljesül az állítás.

Tegyük fel ezek után, hogy érvényes az egyenlőtlenség, ha annak bal oldalán k darab tört szerepel, azaz:

$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\ldots+\frac{x_k^2}{a_k}\geq\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_k)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_k}\,,$$

és „=” $\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\ldots=\dfrac{x_k}{a_k}$.

Mutassuk meg ezek után $(k+1)$-re:

$$\begin{aligned}\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\ldots+\frac{x_k^2}{a_k}+\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}}&\geq\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_k)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_k}+\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}}\geq\\&\geq\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_{k+1})^2}{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}}\,;\end{aligned}$$

az első egyenlőtlenségnél az indukciós lépést, a másodikban pedig az $n=2$ esetet használtuk fel.

$$„=” \Leftrightarrow\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\ldots=\frac{x_k}{a_k}\quad\text{és}\quad\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{a_1+a_2+\ldots+a_k}=\frac{x_{k+1}}{a_{k+1}}\,,$$

s így

$$\frac{x_{k+1}}{a_{k+1}}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{a_1+a_2+\ldots+a_k}=\frac{x_1+x_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}+\ldots+x_1\cdot\dfrac{a_k}{a_1}}{a_1+a_2+\ldots+a_k}=\frac{x_1}{a_1}\,,$$

amivel az állítást beláttuk. ∎

Jöhetnek ezek után az alkalmazások. Először a feladatok listáját közlöm, majd utána a feladatokat a megoldásaikkal együtt. A legvégén pedig megadom a felhasznált forrásokat.

Feladatok

1. feladat. Legyen P egy adott ABC háromszög belső pontja. P-ből a BC, CA, AB egyenesekre állított merőlegesek talppontja rendre D, E, F. Határozzuk meg az összes olyan P pontot, amelyre a

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

összeg a legkisebb.
(Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1981, 1. feladat)

2. feladat. Bizonyítsuk be a *Nesbitt-egyenlőtlenséget*, azaz, hogy bármely a, b, c pozitív számokra fennáll az alábbi összefüggés:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}\,.$$

3. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^+$ esetén:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}\,.$$

4. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a}{xb+yc} + \frac{b}{xc+ya} + \frac{c}{xa+yb} \geq \frac{3}{x+y}\,.$$

5. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számokra:

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{S-a_n} \geq \frac{n}{n-1}\,,$$

ahol $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(n \geq 2)$.

6. feladat. Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c, d pozitív valós számokra fennáll, hogy $a + b + c + d = 1$, akkor teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}\,.$$

(ír versenyfeladat, 1999)

7. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

8. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra érvényes a következő összefüggés:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c.$$

9. feladat. Mutassuk meg, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitív valós számok teljesítik az

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

feltételt, akkor az is igaz rájuk, hogy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}.$$

(Romeo Ilie, Romanian Olympiad, 1999)

10. feladat. Igazoljuk, hogy ha az a, b, c pozitív valós számokra teljesül az $a + b + c = 1$ feltétel, akkor:

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}.$$

(indiai versenyfeladat)

11. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra igaz a következő összefüggés:

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

12. feladat. Mutassuk meg, hogy minden a, b, c pozitív valós szám esetén érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

13. feladat. Tegyük fel, hogy az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $abc = 1$. Igazoljuk, hogy ekkor érvényes a

$$\frac{2}{a^3(b+c)} + \frac{2}{b^3(c+a)} + \frac{2}{c^3(a+b)} \geq ab + bc + ca$$

egyenlőtlenség.

14. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív valós a, b, c számokra teljesül az $abc = 1$ feltétel, akkor az is igaz rájuk, hogy:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}\,.$$

(Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1995, 2. feladat)

15. feladat. Mutassuk meg, hogy minden a, b pozitív valós számra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{18}{(a+b)^4} \leq \frac{2}{(a-b)^4} + \frac{1}{a^3b + b^3a}\,.$$

16. feladat. Igazoljuk, hogy az $abc = 1$ feltételt teljesítő a, b, c pozitív valós számokra teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \geq 1.$$

(Vasile Cartoaje, Gazeta Matematica)

17. feladat. Vegyük alapul az a, b, c pozitív valós számokat, melyek kielégítik az $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ feltételt. Bizonyítsuk be, hogy ekkor teljesül rájuk a következő összefüggés is:

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{9}{a+b+c}\,.$$

18. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c, d pozitív valós számokra fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}\,.$$

(Titu Andreescu, Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1993, Shortlist)

19. feladat. Igazoljuk, hogy ha az a, b, c pozitív valós számok teljesítik az $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$ feltételt, akkor érvényes rájuk az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a}{a^2 - bc + 1} + \frac{b}{b^2 - ca + 1} + \frac{c}{c^2 - ab + 1} \geq \frac{1}{a+b+c}\,.$$

20. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

(Tournament of the Towns, 1998)

21. feladat. Mutassuk meg, hogy bármely a, b, c pozitív valós szám esetén, ahol $abc = 1$, igaz a következő állítás:

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}+\frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6}+\frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+a^6} \geq 2.$$

(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 2014/2015, haladók, III. kategória, 2. (döntő) forduló)

22. feladat. Igazoljuk, hogy ha az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $ab + bc + ca = 3$, akkor érvényes rájuk az alábbi összefüggés is:

$$\frac{a}{b(r+c)}+\frac{b}{c(r+a)}+\frac{c}{a(r+b)} \geq \frac{3}{r+1},$$

ahol r tetszőleges pozitív valós szám.

23. feladat. Mutassuk meg, hogy minden x, y, z pozitív valós számra, melyekre teljesül, hogy $xyz \geq 1$, fennáll az alábbi összefüggés:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5} \geq 0.$$

(Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 2005, 3. feladat)

24. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ esetén:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \geq \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

(Gabriel Dospinescu)

25. feladat. Az a, b, c, x, y, z valós számokra teljesül, hogy $a \geq b \geq c > 0$ és $x \geq y \geq z > 0$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}.$$

(KöMaL, A. 405, koreai versenyfeladat)

A feladatok megoldásai

Az első feladatban a Titu-lemma egy nem szorványos szituációban történő alkalmazását láthatjuk.

1. feladat. Legyen P egy adott ABC háromszög belső pontja. P-ből a BC, CA, AB egyenesekre állított merőlegesek talppontja rendre D, E, F. Határozzuk meg az összes olyan P pontot, amelyre a

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

összeg a legkisebb.
(Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1981, 1. feladat)

Megoldás. Mivel a háromszög kerülete $K = AB+BC+CA$, kétszeres területe pedig $2T = AB \cdot PF + BC \cdot PD + CA \cdot PE$, így

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} = \frac{BC^2}{BC \cdot PD} + \frac{CA^2}{CA \cdot PE} + \frac{AB^2}{AB \cdot PF} \overset{T_2}{\geq} \frac{K^2}{2T}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $PD = PE = PF$, tehát P a *beírt kör középpontja.* A kérdéses összeg minimuma pedig $\dfrac{K^2}{2T}$. ■

2. feladat. Bizonyítsuk be a *Nesbitt-egyenlőtlenséget*, azaz, hogy bármely a, b, c pozitív számokra fennáll az alábbi összefüggés:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Megoldás.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{c(a+b)} \overset{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2},$$

hiszen

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2} \iff a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

ami pedig egy jól ismert egyenlőtlenség, s amiben pontosan akkor van egyenlőség, ha $a = b = c$. ■

A következő három feladat a Nesbitt-egyenlőtlenség egy-egy általánosítását adja meg.

3. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^+$ esetén:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned}\text{bal oldal} &= \frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+e)}+\frac{d^2}{d(e+a)}+\frac{e^2}{e(a+b)} \overset{T_2}{\geq}\\ &\geq \frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+da+ea+eb},\end{aligned}$$

így elegendő igazolnunk, hogy

$$\frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+da+ea+eb} \geq \frac{5}{2}.$$

Ez pedig igaz, hiszen ekvivalens átalakításokkal a következő alakra hozható:

$$\begin{gathered}(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(a-e)^2+(b-c)^2+\\ +(b-d)^2+(b-e)^2+(c-d)^2+(c-e)^2+(d-e)^2 \geq 0.\end{gathered}$$

„=” $\Leftrightarrow a=b=c=d=e$. ∎

4. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a,b,c,x,y \in \mathbb{R}^+$ esetén teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a}{xb+yc}+\frac{b}{xc+ya}+\frac{c}{xa+yb} \geq \frac{3}{x+y}.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\text{bal oldal} &= \frac{a^2}{a(xb+yc)}+\frac{b^2}{b(xc+ya)}+\frac{c^2}{c(xa+yb)} \overset{T_2}{\geq}\\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{abx+acy+bcx+bay+cax+cby}=\\ &= \frac{(a+b+c)^2}{(x+y)(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{x+y};\end{aligned}$$

az utolsó lépésben felhasználtuk a Nesbitt-egyenlőtlenség bizonyításában látott

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2} \iff \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq 3$$

összefüggést. Onnan az is adódik, hogy „=” $\Leftrightarrow a=b=c$. ∎

5. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számokra:

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{S-a_n} \geq \frac{n}{n-1},$$

ahol $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(n \geq 2)$.

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned}
\text{bal oldal} &= \frac{a_1^2}{a_1(S-a_1)} + \frac{a_2^2}{a_2(S-a_2)} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n(S-a_n)} \stackrel{T_2}{\geq} \\
&\geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1S - a_1^2 + a_2S - a_2^2 + \ldots + a_nS - a_n^2} = \\
&= \frac{S^2}{S(a_1+a_2+\ldots+a_n) - (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)} = \\
&= \frac{S^2}{S^2 - (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)},
\end{aligned}$$

így elegendő megmutatnunk, hogy

$$\frac{S^2}{S^2 - (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Ez pedig átalakítások után ekvivalens azzal, hogy

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{S^2}{n}.$$

Ennek az igazolása a Titu-lemmával könnyen megy:

$$\frac{S^2}{n} = \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{1+1+\ldots+1} \stackrel{T_2}{\leq} \frac{a_1^2}{1} + \frac{a_2^2}{1} + \ldots + \frac{a_n^2}{1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

Az is azonnal adódik, hogy „=” $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. ■

6. feladat. Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c, d pozitív valós számokra fennáll, hogy $a + b + c + d = 1$, akkor teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(ír versenyfeladat, 1999)

Megoldás.

$$\text{bal oldal} \stackrel{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c+d)^2}{2(a+b+c+d)} \stackrel{\text{feltétel}}{=} \frac{1}{2}.$$

„=” $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{b}{b+c} = \dfrac{c}{c+d} = \dfrac{d}{d+a}$, ahonnan rövid számolás után adódik, hogy $a = b = c = d \overset{\text{feltétel}}{=} \dfrac{1}{4}$. ■

7. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Megoldás.

$$\text{bal oldal} = \frac{2^2}{2(a+b)} + \frac{2^2}{2(b+c)} + \frac{2^2}{2(c+a)} \overset{T_2}{\geq} \frac{(2+2+2)^2}{4(a+b+c)} = \frac{9}{a+b+c}.$$

„=” $\Leftrightarrow \dfrac{2}{2(a+b)} = \dfrac{2}{2(b+c)} = \dfrac{2}{2(c+a)} \Leftrightarrow a = b = c.$ ■

8. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra érvényes a következő összefüggés:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \text{bal oldal} &= \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{c+a} \overset{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(2(a+b+c))^2}{4(a+b+c)} = a+b+c. \end{aligned}$$

Gyorsan adódik az is, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c.$ ■

9. feladat. Mutassuk meg, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitív valós számok teljesítik az

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

feltételt, akkor az is igaz rájuk, hogy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}.$$

(Romeo Ilie, Romanian Olympiad, 1999)

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n} &= \frac{a_1^2}{a_1b_1}+\frac{a_2^2}{a_2b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_nb_n} \stackrel{T_2}{\geq} \\
&\geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n} \stackrel{\text{feltétel}}{\geq} \\
&\geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n} = \\
&= a_1+a_2+\ldots+a_n.
\end{aligned}$$

Világos, hogy a „T_2” becslésben pontosan akkor van egyenlőség, amennyiben $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, s ekkor a többi egyenlőtlenségben is egyenlőség fog szerepelni. ■

10. feladat. Igazoljuk, hogy ha az a, b, c pozitív valós számokra teljesül az $a+b+c=1$ feltétel, akkor:

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}.$$

(indiai versenyfeladat)

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\text{bal oldal} &= \frac{a^2}{a(1+bc)}+\frac{b^2}{b(1+ca)}+\frac{c^2}{c(1+ab)} \stackrel{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc} \stackrel{\text{feltétel}}{=} \\
&= \frac{1}{1+3abc} \stackrel{A\geq G}{\geq} \frac{1}{1+3\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3} \stackrel{\text{feltétel}}{=} \frac{1}{1+3\cdot\dfrac{1}{27}} = \frac{9}{10}.
\end{aligned}$$

Közvetlenül adódik, hogy „=” $\Leftrightarrow a=b=c \stackrel{\text{feltétel}}{=} \dfrac{1}{3}$. ■

11. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra igaz a következő összefüggés:

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

1. megoldás.

$$\text{bal oldal} = \frac{a^2}{a(b+2c)}+\frac{b^2}{b(c+2a)}+\frac{c^2}{c(a+2b)} \stackrel{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1,$$

felhasználva a korábbi $\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq 3$ összefüggést. Az is adódik onnan, hogy „=” $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

2. megoldás. Közvetlenül adódik a 4. feladat eredményéből. ■

12. feladat. Mutassuk meg, hogy minden a, b, c pozitív valós szám esetén érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}\,.$$

Megoldás. Mivel

$$\text{bal oldal} \overset{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}\,,$$

így elegendő belátnunk, hogy

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{4}\,.$$

Ez pedig teljesül, mivel néhány ekvivalens lépésben a korábban már bebizonyított $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ összefüggésre hozható. Ebből az is adódik, hogy ,=” $\Leftrightarrow$ $a=b=c$. ■

A következő feladatot Mészáros Józseftől hallottam 2010-ben a Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozón, s nagyon jó rávezető példa az 1995-ös Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 2-es feladatára, amit utána meg is nézünk.

13. feladat. Tegyük fel, hogy az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $abc = 1$. Igazoljuk, hogy ekkor érvényes a

$$\frac{2}{a^3(b+c)} + \frac{2}{b^3(c+a)} + \frac{2}{c^3(a+b)} \geq ab+bc+ca$$

egyenlőtlenség.

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\text{bal oldal} &= 2\left(\frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)}\right) \overset{T_2}{\geq} \\
&\geq 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)^2}{ab+bc+ca} \overset{\text{feltétel}}{=} ab+bc+ca.
\end{aligned}$$

„=” $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2(b+c)} = \dfrac{1}{b^2(c+a)} = \dfrac{1}{c^2(a+b)}$. Itt például az első egyenlőségből az adódik, hogy $a^2b + a^2c = b^2c + b^2a$, amit átrendezve és szorzattá alakítva a következő formába önthetünk:

$$(a-b)\left(ab + c\left(a+b\right)\right) = 0.$$

Figyelembe véve, hogy minden változó pozitív a feltétel szerint, ez pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Hasonlóan kapjuk, hogy $b = c$, azaz egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn a feladatban, ha $a = b = c \overset{\text{feltétel}}{=} 1$. ■

14. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív valós a, b, c számokra teljesül az $abc = 1$ feltétel, akkor az is igaz rájuk, hogy:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

(Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1995, 2. feladat)

1. megoldás. Az előző feladatban láttuk, hogy

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{ab+bc+ca}{2},$$

így elegendő belátnunk, hogy

$$ab + bc + ca \geq 3,$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geq 1.$$

Ez viszont igaz, hiszen

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \overset{A \geq G}{\geq} \sqrt[3]{(abc)^2} \overset{\text{feltétel}}{=} 1.$$

Az is közvetlenül adódik az előző feladatból, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

2. megoldás. Tekintsük az alábbi helyettesítéseket:

$$x := \frac{1}{a}, \quad y := \frac{1}{b}, \quad z := \frac{1}{c}.$$

Ekkor teljesülni fog az $xyz = 1$ feltétel, s így az egyenlőtlenség bal oldala a következő lesz:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^3\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^3\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

A kapott kifejezést becsüljük alulról a Titu-lemma segítségével, és vegyük figyelembe a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\overset{T_2}{\geq}\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}\overset{A\geq G}{\geq}\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}\overset{\text{feltétel}}{=}1.$$

Egyenlőséget pontosan akkor kapunk, ha $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c=1$. ■

Az alábbi példa az egyenlőségvizsgálat fontosságára hívja fel a figyelmet.

15. feladat. Igazoljuk, hogy minden a,b pozitív valós számra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{18}{(a+b)^4}\leq\frac{2}{(a-b)^4}+\frac{1}{a^3b+b^3a}.$$

Megoldás. Könnyen ellenőrizhető módon:

$$(a+b)^4=(a-b)^4+8\left(a^3b+b^3a\right).$$

Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned}\frac{2}{(a-b)^4}+\frac{1}{a^3b+b^3a}&=\frac{2}{(a-b)^4}+\frac{8}{8\left(a^3b+b^3a\right)}=\\&=2\left(\frac{1^2}{(a-b)^4}+\frac{2^2}{8\left(a^3b+b^3a\right)}\right)\overset{T_2}{\geq}2\cdot\frac{(1+2)^2}{(a+b)^4}=\\&=\frac{18}{(a+b)^4}.\end{aligned}$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{(a-b)^4}=\frac{2}{8(a^3b+b^3a)}\quad&\Leftrightarrow\quad 8(a^3b+b^3a)=2(a-b)^4\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow\quad(a+b)^4-(a-b)^4=2(a-b)^4\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow\quad(a+b)^4=3(a-b)^4\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow\quad|a+b|=\sqrt[4]{3}\,|a-b|.\end{aligned}$$

Ha ezt az egyenletet megoldjuk, akkor $a>b$ esetén azt kapjuk, hogy

$$a=\frac{1+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}-1}\,b,$$

ha pedig $a<b$, akkor azt, hogy

$$a=\frac{\sqrt[4]{3}-1}{\sqrt[4]{3}+1}\,b.$$

Az $a=b$ eset eleve kizárt, így a feladat megoldásának végére értünk. ■

16. feladat. Igazoljuk, hogy az $abc = 1$ feltételt teljesítő a, b, c pozitív valós számokra teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \geq 1.$$

(Vasile Cartoaje, Gazeta Matematica)

Megoldás. Bevezetve a $d := a + b + c + 1$ jelölést állításunk új alakja a következő lesz:

$$\frac{d-(b+c+1)}{b+c+1} + \frac{d-(c+a+1)}{c+a+1} + \frac{d-(a+b+1)}{a+b+1} \geq 1,$$

ami ekvivalens az alábbival:

$$\frac{d}{d-a} + \frac{d}{d-b} + \frac{d}{d-c} \geq 4.$$

Ennek belátása pedig a Titu-lemmával nem bonyolult feladat:

$$\begin{aligned}
\text{bal oldal} &= \frac{d^2}{d(d-a)} + \frac{d^2}{d(d-b)} + \frac{d^2}{d(d-c)} \overset{T_2}{\geq} \frac{(3d)^2}{3d^2 - d(a+b+c)} = \\
&= \frac{(3d)^2}{3d^2 - d(d-1)} = \frac{9d^2}{2d^2+d} = \frac{9d}{2d+1} \geq 4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad d \geq 4 \Leftrightarrow a+b+c \geq 3 \ \Leftrightarrow \ \frac{a+b+c}{3} \geq 1,
\end{aligned}$$

ami igaz, hiszen

$$1 \overset{\text{feltétel}}{=} \sqrt[3]{abc} \overset{A \geq G}{\leq} \frac{a+b+c}{3}.$$

Az is világos, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c \overset{\text{feltétel}}{=} 1$. ■

17. feladat. Vegyük alapul az a, b, c pozitív valós számokat, melyek kielégítik az $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ feltételt. Bizonyítsuk be, hogy ekkor teljesül rájuk a következő összefüggés is:

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Megoldás. Hozzunk közös nevezőre a bal oldalon, majd alkalmazzuk a Titu-lemmát:

$$\begin{aligned}
\text{bal oldal} &= \frac{a^3}{a^2b^2c^2} + \frac{b^3}{a^2b^2c^2} + \frac{c^3}{a^2b^2c^2} = \\
&= \frac{a^4}{a\left(a^2b^2c^2\right)} + \frac{b^4}{b\left(a^2b^2c^2\right)} + \frac{c^4}{c\left(a^2b^2c^2\right)} \overset{T_2}{\geq} \\
&\geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{(abc)^2(a+b+c)} \overset{\text{feltétel}}{=} \frac{(3abc)^2}{(abc)^2(a+b+c)} = \frac{9}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

Továbbá „=” $\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{a\,(a^2b^2c^2)} = \dfrac{b^2}{b\,(a^2b^2c^2)} = \dfrac{c^2}{c\,(a^2b^2c^2)} \Leftrightarrow a = b = c \overset{\text{feltétel}}{=} 1.$ ■

18. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c, d pozitív valós számokra fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}\,.$$

(Titu Andreescu, Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1993, Shortlist)

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned} &\text{bal oldal} = \\ = \;& \frac{a^2}{a(b+2c+3d)} + \frac{b^2}{b(c+2d+3a)} + \frac{c^2}{c(d+2a+3b)} + \frac{d^2}{d(a+2b+3c)} \overset{T_2}{\geq} \\ \geq \;& \frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}\,, \end{aligned}$$

így elegendő megmutatnunk, hogy

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)} \geq \frac{2}{3}\,.$$

Mivel ez egy pár lépéses rendezés után ekvivalens azzal, hogy

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \geq 0,$$

így az állítást beláttuk. Az is látható, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c = d$. ■

A következő két feladatban az $x^3+y^3+z^3-3xyz$ polinom faktorizálhatóságát fogjuk kihasználni:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right).$$

19. feladat. Igazoljuk, hogy ha az a, b, c pozitív valós számok teljesítik az $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$ feltételt, akkor érvényes rájuk az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a}{a^2-bc+1} + \frac{b}{b^2-ca+1} + \frac{c}{c^2-ab+1} \geq \frac{1}{a+b+c}\,.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\text{bal oldal} &= \frac{a^2}{a\left(a^2-bc+1\right)}+\frac{b^2}{b\left(b^2-ca+1\right)}+\frac{c^2}{c\left(c^2-ab+1\right)} \overset{T_2}{\geq} \\
&\geq \frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc+(a+b+c)} = \\
&= \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)+(a+b+c)} = \\
&= \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+1} \overset{\text{feltétel}}{=} \\
&= \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+3(ab+bc+ca)} = \\
&= \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = \frac{a+b+c}{(a+b+c)^2} = \\
&= \frac{1}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

„=” $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a(a^2-bc+1)} = \dfrac{b}{b(b^2-ca+1)} = \dfrac{c}{c(c^2-ab+1)}$. Ha tekintjük például az első egyenlőséget, akkor abból az adódik, hogy $a^2-bc+1 = b^2-ca+1$, amit átrendezve és szorzattá alakítva az $(a-b)(a+b+c)=0$ alakra hozhatunk. Tekintettel arra, hogy a feltétel értelmében minden változó pozitív, ez pontosan akkor teljesül, ha $a=b$. Analóg módon kapjuk, hogy $b=c$, azaz egyenlőség pontosan akkor áll fenn a feladatban, ha $a=b=c \overset{\text{feltétel}}{=} \dfrac{1}{3}$. ■

20. feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3},$$

ahol a, b, c tetszőleges pozitív valós számok.
(Tournament of the Towns, 1998)

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned}
\text{bal oldal} &= \frac{a^4}{a\left(a^2+ab+b^2\right)}+\frac{b^4}{b\left(b^2+bc+c^2\right)}+\frac{c^4}{c\left(c^2+ca+a^2\right)} \overset{T_2}{\geq} \\
&\geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)} = \\
&= \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc+(a+b+c)(ab+bc+ca)} = \\
&= \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c},
\end{aligned}$$

így elegendő azt belátnunk, hogy

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Ez viszont igaz, hiszen pár ekvivalens lépés után az $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ alakot kapjuk belőle, amit már beláttunk, s azt is, hogy „=” $\Leftrightarrow a=b=c$. ■

21. feladat. Mutassuk meg, hogy bármely a, b, c pozitív valós szám esetén, ahol $abc=1$, igaz a következő állítás:

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}+\frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6}+\frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+a^6} \geq 2.$$

(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 2014/2015, haladók, III. kategória, 2. (döntő) forduló)

Megoldás. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$A:=a^3, B:=b^3, C:=c^3.$$

Ekkor az $ABC=1$ feltétel adódik, és a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti:

$$\frac{A^3+B^3}{A^2+AB+B^2}+\frac{B^3+C^3}{B^2+BC+C^2}+\frac{C^3+A^3}{C^2+CA+A^2} \geq 2.$$

Ennek igazolásához alkalmazzuk kétszer az előző feladat eredményét:

$$\begin{aligned}
\frac{A^3}{A^2+AB+B^2}+\frac{B^3}{B^2+BC+C^2}+\frac{C^3}{C^2+CA+A^2} &\geq \frac{A+B+C}{3}; \\
\frac{B^3}{B^2+BA+A^2}+\frac{A^3}{A^2+AC+C^2}+\frac{C^3}{C^2+CB+B^2} &\geq \frac{A+B+C}{3}.
\end{aligned}$$

Összeadva az egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy:

$$\frac{A^3+B^3}{A^2+AB+B^2}+\frac{B^3+C^3}{B^2+BC+C^2}+\frac{C^3+A^3}{C^2+CA+A^2}\ge 2\cdot\frac{A+B+C}{3}\,.$$

Elegendő tehát annyit belátnunk, hogy

$$\frac{A+B+C}{3}\ge 1.$$

Ez pedig azonnal adódik a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségből:

$$\frac{A+B+C}{3}\ge\sqrt[3]{ABC}\overset{\text{feltétel}}{=}1.$$

Könnyen látható, hogy $A=B=C$, azaz $a=b=c\ (=1)$ esetén minden becslésben egyenlőség lesz. ■

A következő feladat szintén Mészáros József előadásán hangzott el.

22. feladat. Igazoljuk, hogy ha az a,b,c pozitív valós számokra teljesül, hogy $ab+bc+ca=3$, akkor érvényes rájuk az alábbi összefüggés is:

$$\frac{a}{b(r+c)}+\frac{b}{c(r+a)}+\frac{c}{a(r+b)}\ge\frac{3}{r+1}\,,$$

ahol r tetszőleges pozitív valós szám.

Megoldás. Először is

$$\begin{aligned}\text{bal oldal} &= \frac{a^2}{ab(r+c)}+\frac{b^2}{bc(r+a)}+\frac{c^2}{ca(r+b)}\overset{T_2}{\ge}\\ &\ge \frac{(a+b+c)^2}{r(ab+bc+ca)+3abc}\overset{\text{feltétel}}{=}\frac{a^2+b^2+c^2+6}{3r+3abc}\overset{\text{rendezési tétel}}{\ge}\\ &\ge \frac{ab+bc+ca+6}{3r+3abc}\overset{\text{feltétel}}{=}\frac{9}{3r+3abc}=\frac{3}{r+abc}\,.\end{aligned}$$

Másrészt a feltétel értelmében

$$1=\frac{ab+bc+ca}{3}\overset{A\ge G}{\ge}\sqrt[3]{(abc)^2},$$

így

$$\text{bal oldal}\ge\frac{3}{r+1}\,,$$

amit éppen állítottunk.

Közvetlenül adódik a korábbiakból, hogy „=” $\Leftrightarrow a=b=c\overset{\text{feltétel}}{=}1$. ■

23. feladat. Mutassuk meg, hogy minden x, y, z pozitív valós számra, melyekre teljesül, hogy $xyz \geq 1$, fennáll az alábbi összefüggés:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

(Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 2005, 3. feladat)

Megoldás. Mivel

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \frac{(x^5 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)}{x^5 + y^2 + z^2} = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2}$$

(s hasonlóan a többi törtre is), kapjuk, hogy

$$\text{bal oldal} = 3 - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \right).$$

Így a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens átfogalmazása a következő:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq 3.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt $(x^2 + y^2 + z^2)$-tel:

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Ennek bizonyításához használjuk a Titu-lemmát:

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^5 + y^2 + z^2} \overset{T_2}{\leq} \frac{(x^2)^2}{x^5} + \frac{(y^2)^2}{y^2} + \frac{(z^2)^2}{z^2} = \frac{1}{x} + y^2 + z^2.$$

Analóg módon kapjuk a másik két tört felső becslését:

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^5 + z^2} &\leq x^2 + \frac{1}{y} + z^2, \\ \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^2 + z^5} &\leq x^2 + y^2 + \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Adjuk össze a három egyenlőtlenség megfelelő oldalait:

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^2 + z^5} &\leq \\ \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right). \end{aligned}$$

Elegendő tehát belátnunk, hogy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+2\left(x^2+y^2+z^2\right) \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Ez már gyorsan kijön:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+2\left(x^2+y^2+z^2\right) \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow \frac{xy+yz+zx}{xyz} \le x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & xy+yz+zx \le xyz\left(x^2+y^2+z^2\right), \end{aligned}$$

ami igaz, hiszen a feltétel értelmében $xyz \ge 1$, a rendezési tétel miatt pedig - mint ahogy azt láttuk korábban - $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$.
Az is azonnal adódik, hogy „=” $\Leftrightarrow xyz=1$, ami a feltétel tekintetbe vételével azt jelenti, hogy $x=y=z=1$. ■

A következő két feladat azon túl, hogy nagyon összetett, jól mutatja, hogy a Titu-lemma alkalmazásakor nem mindegy, hogy a törtek nevezőit és számlálóit hogyan bővítjük.

24. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ esetén:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \ge \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

(Gabriel Dospinescu)

Megoldás. Szinte kínálja magát a bal oldal, hogy azonnal alkalmazzuk rá a Titu-lemmát. Nézzük, mi jön ki belőle:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \ge \frac{(a+b+c)^2}{(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2}.$$

Azt kellene tehát megmutatnunk, hogy

$$\frac{(a+b+c)^2}{(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2} \ge \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Gyorsan belátjuk, hogy ezt az egyenlőtlenséget nem tudjuk igazolni, mivel nem igaz. Ehhez vezessük be a következő jelöléseket:

$$x := a^2+b^2+c^2, \quad y := ab+bc+ca.$$

Így a bizonyítandó egyenlőtlenség alakja az alábbi lesz:

$$\frac{x+2y}{2x+2y} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{y},$$

ami pár lépés után a következőt adja:

$$4y^2 \geq 3x^2 + xy.$$

Ez pedig nyilvánvalóan hamis, mivel $x \geq y$, azaz túlságosan erős volt a becslés. Emiatt először bővítsük a törteket, majd aztán alkalmazzuk a Titu-lemmát:

$$\begin{aligned} \text{bal oldal} &= \frac{a^4}{a^2(b+c)^2} + \frac{b^4}{b^2(c+a)^2} + \frac{c^4}{c^2(a+b)^2} \overset{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(ab+ac)^2+(bc+ba)^2+(ca+cb)^2}, \end{aligned}$$

vagyis elég belátnunk, hogy

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(ab+ac)^2+(bc+ba)^2+(ca+cb)^2} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Innen ekvivalens lépésekkel a következőt kapjuk:

$$2a^3b+2a^3c+2b^3a+2b^3c+2c^3a+2c^3b \geq 3a^2b^2+3b^2c^2+3c^2a^2+a^2bc+b^2ca+c^2ab.$$

Mivel

$$0 \leq ab(a-b)^2 = a^3b + ab^3 - 2a^2b^2,$$

így kapjuk, hogy

$$a^3b + ab^3 \geq 2a^2b^2.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$b^3c + cb^3 \geq 2b^2c^2,$$
$$c^3a + ca^3 \geq 2c^2a^2.$$

A három egyenlőtlenséget összeadva, majd a kapott egyenlőtlenséget 2-vel szorozva a

$$2a^3b + 2a^3c + 2b^3a + 2b^3c + 2c^3a + 2c^3b \geq 4a^2b^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2$$

összefüggéshez jutunk. Elegendő tehát megmutatnunk azt, hogy

$$4a^2b^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 \geq 3a^2b^2 + 3b^2c^2 + 3c^2a^2 + a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Ez viszont igaz, hiszen pár lépés után a következő alakra hozható:

$$a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2 \geq 0.$$

Az is jól látszik innen, hogy egyenlőség pontosan akkor áll fenn, amennyiben $a = b = c$. ∎

25. feladat. Az a, b, c, x, y, z valós számokra teljesül, hogy $a \geq b \geq c > 0$ és $x \geq y \geq z > 0$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}.$$

(KöMaL, A. 405, koreai versenyfeladat)

Megoldás. A rendezési tétel segítségével először is végezzünk becslést a nevezőkre vonatkozóan (a változók között fennálló nagyságrendi viszony egyébként sugallja a rendezési tétel használatát):

$$\begin{aligned} bz+cy \leq by+cz \quad &\Rightarrow \quad (by+cz)(bz+cy) \leq (by+cz)^2, \\ cx+az \leq cz+ax \quad &\Rightarrow \quad (cz+ax)(cx+az) \leq (cz+ax)^2, \\ ay+bx \leq ax+by \quad &\Rightarrow \quad (ax+by)(ay+bx) \leq (ax+by)^2. \end{aligned}$$

(„=” $\Leftrightarrow a = b = c$ vagy $x = y = z$). Így az egyenlőtlenség bal oldala alulról becsülhető:

$$\text{bal oldal} \geq \frac{a^2x^2}{(by+cz)^2} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)^2} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)^2},$$

vagyis elég lenne annyit belátnunk, hogy

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)^2} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)^2} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Ha valaki ezen a ponton bővítés nélkül alkalmazza a Titu-lemmát, hasonló akadályba ütközik, mint azt láttuk az előző feladatban (javaslom kipróbálásra). Ehelyett vezessük be az $A := ax$, $B := by$, $C := cz$ jelöléseket, s így a bizonyítandó összefüggés az alábbi alakot ölti:

$$\left(\frac{A}{B+C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C+A}\right)^2 + \left(\frac{C}{A+B}\right)^2 \geq \frac{3}{4},$$

ami azonnal adódik az előző feladatból, hiszen - mint azt már többször felhasználtuk -

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{AB+BC+CA} \geq 1.$$

Az egyenlőség feltétele az előző feladat és a rendezési tételre vonatkozó ismeretek miatt: $a = b = c$ és $x = y = z$. ∎

Források

- Reiman István, Dobos Sándor: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-2003, Typotex 2003, Budapest
- http://artofproblemsolving.com/articles/files/MildorfInequalities.pdf
  Letöltve: 2015. 10. 18.
- http://www.artofproblemsolving.com/community/c1642h1004517
  Letöltve: 2015. 10. 18.
- http://www.icstm.ro/DOCS/josa/josa_2008_1/a.10_GENERALIZATIONS_AND_REFINEMENTS_FOR_BERGSTROM_AND_RADONS_INEQUALITIES.pdf
  Letöltve: 2015. 10. 18.
- http://www.komal.hu/forum/forum.cgi?a=to&tid=32&st=25&sp=303
  Letöltve: 2015. 10. 18.
- http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=A405&l=hu
  Letöltve: 2015. 10. 18.
- http://www.utdallas.edu/scimathed/faculty/profiles/andreescu.html
  Letöltve: 2015. 10. 18.
- https://brilliant.org/wiki/titus-lemma/
  Letöltve: 2015. 10. 18.
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Titu-lemma
  Letöltve: 2015. 10. 18.
- https://ineqkhoinguyen.files.wordpress.com/2008/02/titu-and-harazi-bo-ich.pdf
  Letöltve: 2015. 10. 18.