Feladatok közepek közötti egyenlőtlenségekre (megoldások, megoldási ötletek)

A továbbiakban szmk=számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség, szhk=számtani- harmonikus közép közötti egyenlőtlenség, míg sznk= számtani-négyzetes közép közötti egyenlőtlenség.

1. A kéttagú szmk felhasználásával könnyen igazolható mindkettő. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn ha *a*=*b*=*c*.

2. Alkalmazzuk a kéttagú szmk-t az egyes tagokra alábbi módon!

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} = \sqrt{\frac{x}{x+y}\frac{x}{x+z}} \le \frac{\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}}{2}$$

Ezt mindhárom tagra felírva, majd a kapott egyenlőtlenségeket összeadva könnyen jön az állítás. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha *x*=*y*=*z*.

3. Alkalmazzuk a kéttagú szmk-t az egyes tagokra alábbi módon!

$\sqrt{(a+b)(c+d)} \ge \sqrt{2\sqrt{ab}\,2\sqrt{cd}} = 2\sqrt[4]{abcd} = 2$ Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn ha *a*=*b*=*c*=*d*.

4. A háromtagú négyzetes-harmonikus közép egyenlőtlensége alapján könnyen jön. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn ha *a*=*b*=*c*.

5. Alkalmazzuk a tíztagú szmk-t. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn ha *a*=*b*=*c*=*d*=*1*.

6. Ez a feladat állatorvosi ló, több megoldást is adunk rá.

1. megoldás

Adjunk hozzá az egyenlőtlenség mindkét oldalához 3-at, majd hozzuk az alábbi alakra!

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{y+x} \ge \frac{3}{2}$$

c

$$\frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}+1+\frac{z}{y+x}+1 \ge \frac{3}{2}+3$$

c

$$\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}+\frac{x+y+z}{y+x} \ge \frac{9}{2}$$

c

$$\big((x+y)+(y+z)+(z+x)\big)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{y+x}\right) \ge 9$$

Ezen utóbbi egyenlőtlenség pedig könnyen bizonyítható a háromtagú szhk alapján. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha *x*=*y*=*z*.

2. megoldás:

Legyen x+y+z=d! Ekkor $\frac{x}{d}+\frac{y}{d}+\frac{z}{d}=1$. Legyen $a=\frac{x}{d}$, $b=\frac{y}{d}$, $c=\frac{z}{d}$, így a+b+c=1.

Ez alapján $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{y+x}=\frac{\frac{x}{d}}{\frac{y}{d}+\frac{z}{d}}+\frac{\frac{y}{d}}{\frac{z}{d}+\frac{x}{d}}+\frac{\frac{z}{d}}{\frac{y}{d}+\frac{x}{d}}=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{b+a}$.

Tehát már az elején feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy *x*+*y*+*z*=1. Ezt nevezik normalizálásnak. Alkalmazzuk az x, y, z súlyokkal súlyozott szhk-t, majd használjuk fel azt a közismert tényt, hogy $\frac{(x+y+z)^2}{3}\geq xy+yz+zx$.

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{y+x}\geq\frac{1}{x(y+z)+y(z+x)+z(y+x)}=\frac{1}{2xy+2yz+2zx}\geq$$

$$\geq\frac{1}{2\frac{(x+y+z)^2}{3}}=\frac{3}{2}$$

3. megoldás:

Legyen a=x+y, b=y+z, c=z+x, ekkor $x=\frac{a+c-b}{2}$, $y=\frac{b+a-c}{2}$, $z=\frac{b+c-a}{2}$. Így a bizonyítandó egyenlőtlenség $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{y+x}=\frac{a+c-b}{2b}+\frac{a+b-c}{2c}+\frac{b+c-a}{2a}\geq\frac{3}{2}$

alakot ölti, ami ekvivalens az $\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}\geq 6$ egyenlőtlenséggel, ami egy pozitív szám és reciprokának összegére vonatkozó becslés alapján könnyen igazolható.

Ezt a helyettesítést a továbbiakban háromszög-helyettesítésnek nevezzük, mert ilyen jellegű kifejezések jelennek meg ha a beírt kör érintési pontjai és a csúcsok közötti szakaszokat kifejezzük a háromszög oldalaival.

4. megoldás:

Használjuk a 2. megoldásban szereplő normalizálást! Ez alapján a baloldal átírható $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{y+x}=\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}$ alakban. Az $f:\left]0;1\right[\to\mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{1-x}$ függvény szigorúan konvex az értelmezési tartományán, így alkalmazhatjuk a Jensen- egyenlőtlenséget.

$$f(x)+f(y)+f(z)\geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

7. Mindhárom esetben alkalmazzuk a háromszög helyettesítést, azaz legyen *x*=*s*-*a*, *y*=*s*-*b*, *z*=*s*-*c*! Ezután az a) a kéttagú szk-val, a b) a háromtagú szhk-val, a c) pedig a háromtagú sznk-val megoldható. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha *a*=*b*=*c*.

8. a) Osszuk végig az egyenlőtlenséget a+b+c-vel, ekkor az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk. Ekkor a baloldalon az $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$, $\frac{c}{b+a}$ kifejezések a, b, c súlyokkal súlyozott számtani közepe jelenik meg. Ezután alkalmazzuk a súlyozott szhk-t!

b) Emeljük mindkét oldalt $\frac{1}{a+b+c}$ -edikre, majd szorozzunk be kettővel és az így kapott, eredetivel ekvivalens egyenlőtlenségnél alkalmazzuk a jobboldalra a súlyozott szmk-t és használjuk fel, hogy $\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca$!

c) Alkalmazzuk a súlyozott szmk-t *ab, bc, ca* súlyokkal, és használjuk fel, hogy $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$, valamint az exponenciális függvény 1-nél nagyobb alap esetén szigorúan monoton növekvő!

9. a) Nézzük külön-külön a baloldali tagokat, alkalmazzuk a háromtagú szmk-t!

$$a^2b = \sqrt[3]{\left(a^3\right)^2 b^3} \leq \frac{2a^3+b^3}{3}$$
$$b^2c = \sqrt[3]{\left(b^3\right)^2 c^3} \leq \frac{2b^3+c^3}{3}$$
$$c^2a = \sqrt[3]{\left(c^3\right)^2 a^3} \leq \frac{2c^3+a^3}{3}$$

A három egyenlőtlenséget összeadva megkapjuk a bizonyítandó állítást. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn ha *a*=*b*=*c*.

b) Hasonló az előzőhöz.

c) Beszorzás és rendezés után visszavezethető az a) és b) részre.

10. Az előző feladat c) része alapján könnyen megoldható.

11. Alkalmazzuk a kéttagú szmk-t a jobboldalra, majd a 9. feladat a) és b) részét!

12. a) A 9. feladatban látott módszert alkalmazhatjuk.

$$a^2bc = \sqrt[4]{\left(a^4\right)^2 b^4c^4} \leq \frac{2a^4+b^4+c^4}{4}$$
$$b^2ca = \sqrt[4]{\left(b^4\right)^2 c^4a^4} \leq \frac{2b^4+c^4+a^4}{4}$$
$$c^2ab = \sqrt[4]{\left(c^4\right)^2 a^4b^4} \leq \frac{2c^4+a^4+b^4}{4}$$

A három egyenlőtlenséget összeadva megkapjuk a bizonyítandó állítást. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn ha *a*=*b*=*c*.

b), c) Az a) részhez hasonlóan bizonyítható.

13. a) Az előző feladatban látott gondolatmenetet általánosítjuk. A súlyozott szmk-t alkalmazzuk és meghatározzuk a súlyokat.

Első egyenlőtlenség.

Legyenek a súlyok a, b, c pozitív valós számok, melyek összege 1 és bontsuk három részre az egyenlőtlenséget!

$$a\cdot x^4y+b\cdot y^4z+c\cdot z^4x\geq x^{4a+c}y^{4b+a}z^{4c+b}=x^3yz$$

Az egyenlőség alapján felírhatjuk az alábbi egyenletrendszert.

$$\left.\begin{aligned}4a+c&=3\\4b+a&=1\\4c+b&=1\end{aligned}\right\}$$

Ennek megoldásai $a=\dfrac{9}{13}$, $b=\dfrac{1}{13}$, $c=\dfrac{3}{13}$.

Így

$$\begin{aligned}&\frac{9}{13}\cdot x^4y+\frac{1}{13}\cdot y^4z+\frac{3}{13}z^4x\geq x^3yz\\&\frac{3}{13}\cdot x^4y+\frac{9}{13}\cdot y^4z+\frac{1}{13}z^4x\geq xy^3z\,.\\&\frac{1}{13}\cdot x^4y+\frac{3}{13}\cdot y^4z+\frac{9}{13}z^4x\geq xyz^3\end{aligned}$$

A kapott egyenlőtlenségeket összeadva megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x=y=z$.

A többi egyenlőtlenség hasonlóan bizonyítható.

A b) feladat az a)-hoz hasonlóan oldható meg.

14. Beszorzás után alkalmazzuk az előző feladatokban látott módszert!

15. Mivel abc=1, ezért $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=1$. Így azt kell belátni, hogy
$a+b+c=a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{4}{3}}\leq a^2+b^2+c^2$.
Ezt pedig az előző feladatokhoz hasonlóan bizonyíthatjuk, ugyanis
$a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{a^8b^2c^2}\leq\dfrac{4a^2+b^2+c^2}{6}$.

A többi tagra hasonló összefüggéseket felírva és azokat összeadva megkapjuk a bizonyítandó állítást. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

16. a) Mivel a baloldal értéke független a változók előjelétől, jobboldalé pedig nem csökken ha a számokat pozitívra változtatjuk, így elég azt az esetet megnézni, mikor a számok pozitívak.

A háromtagú sznk miatt $\frac{x_1^2}{x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_3^2}+\frac{x_3^2}{x_1^2}\geq 3\left(\frac{\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}}{3}\right)^2$, másrészt

$\frac{\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3}\frac{x_3}{x_1}}=1$, ezért $\frac{x_1^2}{x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_3^2}+\frac{x_3^2}{x_1^2}\geq 3\left(\frac{\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}}{3}\right)^2\geq\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}$.

b) Visszavezethető teljes négyzetek összegére.

c) Az a) részhez hasonlóan oldható meg csak negyedrendű hatványközép és számtani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával.

17. Tudjuk, hogy $2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)$. Így az egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy $a^2+b^2+c^2+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\geq(a+b+c)^2=9$.

Alkalmazzuk a háromtagú szmk-t!

$$a^2+b^2+c^2+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})=a^2+2\sqrt{a}+b^2+2\sqrt{b}+c^2+2\sqrt{c}\geq 3\left(\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{b^3}+\sqrt[3]{c^3}\right)=9$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn ha *a=b=c=1*.

18. Az sznk alapján

$$\sqrt{a^2+(1-a)^2}+\sqrt{b^2+(1-b)^2}+\sqrt{c^2+(1-c)^2}\geq\frac{|a|+|1-a|}{\sqrt{2}}+\frac{|b|+|1-b|}{\sqrt{2}}+\frac{|c|+|1-c|}{\sqrt{2}}\geq$$

$$\geq\frac{|a+1-a|}{\sqrt{2}}+\frac{|b+1-b|}{\sqrt{2}}+\frac{|b+1-b|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

19. Mivel a, b, c $\in$]0;1[, ezért $\sqrt{abc}<\sqrt[3]{abc}$ és $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}$.

A háromtagú szmk alapján

$$\sqrt{abc}<\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}$$

$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\leq\frac{1-a+1-b+1-c}{3}$, ezeket összeadva kapjuk az bizonyítandó egyenlőtlenséget.

20. A szhk alapján $\frac{2}{a+b+2c}=\frac{2}{a+c+b+c}\leq\frac{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}}{2}$. Alkalmazzuk ezt a baloldal három tagjára!

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)+\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)+\frac{ac}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)=$$
$$=\frac{a+b+c}{4}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha *a*=*b*=*c*.

21. Beszorzás és rendezés után a $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$ egyenlőtlenséget kapjuk., ami ekvivalens az eredetivel.

Szorozzuk mindkét oldalt 3-mal, majd alkalmazzuk a szmk-t az alábbi módon!

$$3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)=\left(\frac{2x}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{2y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{2z}{x}\right)\ge\frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{3y}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{3z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

n-tagú közepek közötti egyenlőtlenség

1. Az n-tagú szmk mellett alkalmazzuk az első n db pozitív egész szám, négyzetszám, köbszám összegére vonatkozó képletet!

2. Nézzük csak az első egyenlőtlenséget, a második ahhoz hasonlóan bizonyítható be.

Adjunk hozzá mindkét oldalhoz n-et, majd osszuk el az így kapott egyenlőtlenséget n-nel. Ekkor az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk.

$$\sqrt[n]{n+1}\le\frac{n+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$$

Ezt a jobboldal átalakításával, majd a szmk felhasználásával igazolhatjuk.

$$\frac{n+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}=\frac{1+1+1+\frac{1}{2}+\ldots+1+\frac{1}{n}}{n}=$$
$$=\frac{2+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n+1}{n}}{n}\ge\sqrt[n]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}}=\sqrt[n]{n+1}$$

3. Írjuk az egyenlőtlenséget az eredetivel ekvivalens alakban!

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}-1}\ge\sqrt{n}$$

Gyöktelenítsük a baloldalt és alkalmazzuk az n-tagú sznk-t.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}-1}=\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{n}\right)^{n-2}+\ldots+\sqrt[n]{n}+1}{n-1}=\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{n}\right)^{n-2}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n-1}+\frac{1}{n-1}\ge$$
$$\ge\sqrt[n-1]{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{n-1}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{n-2}\ldots\sqrt[n]{n}}+\frac{1}{n-1}=\sqrt[n-1]{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{(n-1)\frac{n}{2}}}+\frac{1}{n-1}=\sqrt{n}+\frac{1}{n-1}>\sqrt{n}$$

A 4., 5., 6., 7., 8. feladat megoldása megtalálható Pintér Lajos Analízis I. című könyvében.

9. Azt kell belátni, hogy $c_{n-1} < c_n$, ha n>1. Ha beírjuk a megfelelő tagokat, akkor az egyenlőtlenség az eredetivel ekvivalens $\frac{n^2-1}{n^2} > \sqrt[n]{\frac{4n-3}{4n+1}}$.

Alkalmazzunk n-tagú szmk-t az alábbi módon!

$$\sqrt[n]{\frac{4n-3}{4n+1}} = \sqrt[n]{\sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}}\cdot\sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}}\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot1}_{n-2}} \le \frac{2\cdot\sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}}+n-2}{n}$$

Ezen utóbbi kifejezésről kell belátni, hogy kisebb, mint $\frac{n^2-1}{n^2}$.

$$\frac{2\cdot\sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}}+n-2}{n} < \frac{n^2-1}{n^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$2\cdot\sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}}+n-2 < \frac{n^2-1}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$4n^2\frac{4n-3}{4n+1} < (2n-1)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$0<1$$

Szélsőérték feladatok közepekkel

1. Nézzük pl. a b) feladatot, a többi hasonlóan oldható meg.

b) $g:(\mathbb{R}\setminus\{0\})\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{x^6+4}{x^2}$ Alkalmazzuk a háromtagú szmk-t az alábbi módon!

$$g(x)=\frac{x^6+4}{x^2}=x^4+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^2}\ge 3\sqrt[3]{x^4\frac{2}{x^2}\frac{2}{x^2}}=3\sqrt[3]{4}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x^4=\frac{2}{x^2} \Leftrightarrow |x|=\sqrt[6]{2}$.

2. Nézzük meg pl. a b) feladatot!

b) $g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(1+x)^3(1-x)$ Alkalmazzuk a négytagú szmk-t az alábbi módon!

$$g(x)=(1+x)^3(1-x)=\frac{1}{3}(1+x)^3(3-3x)\le\frac{1}{3}\left(\frac{3(1+x)+3-3x}{4}\right)^4=\frac{27}{16}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha 1+x=3-3x, azaz x=0,5.

A 3., 4., 5., 6., 7., 8. feladatban a szöveg alapján meg kell adni a vizsgált függvényeket és az előző két feladatban látott módszer valamelyikét alkalmazhatjuk!