Algebrai kifejezések alkalmazása oszthatósági feladatokban és egyenletmegoldásban

dr. Katz Sándor, Bonyhád

A 2004. évi nagykanizsai konferencián már tartottam előadást hasonló címen. A konferencia írott anyagában ez megtalálható.

Most néhány újabb feladatot szeretnék bemutatni ebben a témában. Itt is néhány nem teljesen közismert azonosság alkalmazásait szeretném bemutatni, az oszthatóság, egyenletek, diofantoszi egyenletek témakörben. A bemutatott példákra részletes megoldást írok, de adok néhány önálló megoldásra szánt feladatot is.

I. n^2+n, n^2+n+1, x^2+y^2, x^2+2y^2 alakú számok és azonosságaik

1. példa

Oldjuk meg a természetes számok halmazán.

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=y(y+1)$$

Megoldás:

Nyilván $x=0$, $y=0$ megoldás.
Van-e megoldás pozitív egész számokban?
Jó tudni, hogy négy egymást követő természetes szám szorzatához 1-et adva mindig négyzetszámot kapunk:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=\left(x^2+3x+1\right)^2$$

Valóban

$$x(x+3)=x^2+3x+a\ ,\ (x+1)(x+2)=x^2+3x+2=a+2\ ,$$

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=a(a+2)+1=a^2+2a+1=(a+1)^2\ .$$

Tehát egyenletünk $\left(x^2+3x+1\right)^2=y^2+y+1$ alakra hozható, de a jobb oldal pozitív *y* esetén y^2 és $(y+1)^2$ közé esik, ezért nem lehet négyzetszám.

1. feladat

Oldjuk meg a következő egyenletet egész számokban.

$$x+x^2=1+y+y^2+y^3+y^4$$

Nézzünk néhány további példát az n^2+n és n^2+n+1 alakú számokra. Mindegyikre nyílván igaz, hogy pozitív n esetén nem lehet négyzetszám, mert n^2 és $(n+1)^2$ közé esnek.

2. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet egész számokban.

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+....+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}=y$$

(** $n\ge 2$ **gyökjel)

Megoldás:

Ha sorban négyzetre emelünk, akkor a két utolsó egyenlet $\sqrt{x+\sqrt{x}}=k$ és $\sqrt{x}=n$, alakú, ezekből $n^2+n=k^2$, de ez csak $n=k=0$ lehet, egyébként a bal oldal két négyzetszám közé esik.
Ebből csak az $x=y=0$ az egész megoldása az egyenletnek.

3. példa

Milyen n természetes szám esetén lehet $f(n)=n^3+2n^2+2n+1$ ***négyzetszám?***

Megoldás:

$n=0$ esetén $f(n)=1$, négyzetszám.

Megmutatjuk, hogy $k\ge 1$ esetén n^3+2n^2+2n+1 nem lehet négyzetszám.
$n^3+2n^2+2n+1=(n+1)(n^2+n+1)$ tényezői relatív prímek és a második nem négyzetszám.

4. példa

Mutassuk meg, hogy az n^2+n+1 alakú számok között végtelen sok olyan pár van, amelyek szorzata szintén ilyen alakú.

Megoldás:

Készítsünk egy táblázatot az n^2+n+1 alakú számokról!

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n^2+n+1	3	7	13	21	31	43	57	73	91	111	133	157	183	210	241	273

Látható, hogy két szomszédos szorzata ugyanilyen alakú lesz. Megmutatjuk, hogy ez minden *n*-re igaz.

$$\left(n^2+n+1\right)\left[\left(n+1\right)^2+\left(n+1\right)+1\right]=\left(n^2+n+1\right)\left(n^2+3n+3\right)=$$
$$=n^4+4n^3+7n^2+4n+3=\left(n^2+2n+1\right)^2+\left(n^2+2n+1\right)+1$$

Természetesen a táblázatból az is látszik, hogy nem bármely két n^2+n+1 alakú szám szorzat lesz ugyanilyen alakú. Tehát ez a halmaz nem zárt a szorzásra nézve.

A természetes számok halmazának több olyan nevezetes részhalmaza is van, amely zárt a szorzásra nézve: azaz a halmazba tartozó bármely két szám szorzata is a halmazban van.
A nyilvánvaló példákon: pl. páros számok, pártalan számok, kettő-hatványok, stb., ilyen pl. a az $1\cdot 2+3$, $4\cdot 5+6$, $7\cdot 8+9$, ..., $(3k-2)(3k-1)+3k$ sorozat is.

2. feladat

Igazoljuk, hogy az $1\cdot 2+3$, $4\cdot 5+6$, ..., $(3k-2)(3k-1)+3k$ sorozatból akárhány elemet összeszorozva, a szorzat előállítható két négyzetszám összegeként.

Megoldás:

Az előző előadásban beláttuk pl. hogy a két négyzetszám összegeként előállítható számok halmaza is zárt a szorzásra nézve.

Ezt igazolja a következő azonosság:

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2=$$
$$=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$$

Az azonosság ismerete segíti a következő feladat megoldását is.

3. feladat

Mutassuk meg, hogy az $\frac{a^2+b^2}{ac+bd}$ *tört, amelyben a, b, c, d egész számok, nem egyszerűsíthető, ha* $ad-bc=1$.

5. példa

a) ***Igazoljuk, hogy*** 235^2+972^2 ***összetett szám.***
b) ***Igazoljuk, hogy ha egy*** $m=4k+1$ ***alakú szám kétféleképp felírható két négyzetszám összegeként, akkor összetett.***

Megoldás:

Először a *b)* részt látjuk be. Legyen

$$m=x^2+y^2=u^2+v^2. \qquad (1.)$$

Tegyük fel hogy $x>u$ páratlanok és $v>y$ párosak. Legyen $x-u$ és $v-y$ legnagyobb közös osztója 2*d*.
Ekkor $x=u+2da$, $v=y+2db$, ahol $(a;b)=1$.
Ezeket (1.)-be írva: $au+da^2=by+db^2=abc$ mert *a*-val is *b*-vel is osztható és $(a;b)=1$. Ebből $u=bc-ad$, $y=ac-bd$, és $x=u+2ad=bc+ad$.
Tehát $m=x^2+y^2=(bc+ad)^2+(ac-bd)^2$.

A **2. feladatban** említett azonosság szerint

$$m=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right).$$

Térjünk most rá az *a)* feladatra!

$$m = 235^2 + 972^2 = 1000009 = 1000^2 + 3^2$$

Tehát a *b)* feladat szerint $m = 235^2 + 972^2$ összetett szám.
A fenti bizonyítás konstrukciót is ad *m* szorzattá alakítására.
A fenti gondolatmenetet követve:

$x = 235$, $y = 972$, $u = 3$, $v = 1000$.

$x - u = 232$, $v - y = 28$. $2d = (232;28) = 4$, $\Rightarrow$ $d = 2$.

$x - u = 2 \cdot 2 \cdot 58$ $\Rightarrow$ $a = 58$, $v - y = 2 \cdot 2 \cdot 7$ $\Rightarrow$ $b = 7$.

$ua + da^2 = 3 \cdot 58 + 2 \cdot 58^2 = 58 \cdot (3 + 116) = 58 \cdot 119 = 58 \cdot 7 \cdot 17$. $\Rightarrow$ $c = 17$.

$$m = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (58^2 + 7^2)(17^2 + 2^2) = 3413 \cdot 293.$$

Ez valóban 1 000 009.

Megjegyzés: Tudjuk, hogy egy természetes szám akkor és csak akkor írható fel két négyzetszám összegeként, ha törzstényezős felbontásában $4k - 1$ alakú prímszám nem szerepel páratlan kitevővel. Ezekben a feladatokban nem alkalmaztuk ezt az ismeretet.

4. feladat

a) *Igazoljuk az* $(xz - 2yt)^2 + 2(xt + yz)^2 = (x^2 + 2y^2)(z^2 + 2t^2)$ *azonosságot.*

b) *Az* $n = a^2 + 2b^2$ *képletbe helyettesítsük be az összes olyan (a;b) számpárt, ahol a egyjegyű, b háromjegyű pozitív egész szám. Az így n-re kapott 8100 értékről mutassuk meg, hogy mind különbözők. Képezzük ennek a 8100 számnak az összes* $(2^{8100} - 1\ db)$ *nem üres részhalmazát, és minden részhalmazban szorozzuk össze az elemeket. Ezen szorzatok közül hány lesz felírható* $x^2 + 2y^2$ *alakban, ahol x, y egész?*

c) *Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert.*

$$\left.\begin{aligned} xz - 2yt &= 3 \\ xt + yz &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

6. példa

Mutassuk meg, hogy ha 3n felírható x^2+2y^2 alakban, $(n,x,y\in\mathbb{N})$ akkor n is felírható ilyen alakban.

Megoldás:

Használjuk fel, hogy $\frac{x^2+2y^2}{3}=\left(\frac{x\pm 2y}{3}\right)^2+\left(\frac{x\mp y}{3}\right)^2$, majd vizsgáljuk meg külön, hogy mi lehet *x* és *y* 3-as maradéka!

Nézzünk még néhány példát egyszerű azonosságok alkalmazására.

7. példa

Hozzuk egyszerűbb alakra.

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}=$$

Megoldás:

Először bővítsünk minden tényezőt 16-tal, majd alkalmazzuk az

$$n^2+4=\left[(n-1)^2+1\right]\left[(n+1)^2+1\right]$$

azonosságot!

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=\frac{\left(2^4+4\right)\left(6^4+4\right)\left(10^4+4\right)\ldots\left(22^4+4\right)}{\left(4^4+4\right)\left(8^4+4\right)\left(12^4+4\right)\ldots\left(24^4+4\right)}=$$

$$=\frac{\left(1^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)..\left(21^2+1\right)\left(23^2+1\right)}{\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)..\left(23^2+1\right)\left(25^2+1\right)}=$$

$$=\frac{\left(1^2+1\right)}{\left(25^2+1\right)}=\frac{2}{626}=\frac{1}{313}$$

8. példa

Mely x, y, z racionális számok esetén lesz az

$$\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}}$$

kifejezés értéke racionális szám?

Megoldás:

Ha kipróbálunk néhány páronként különböző (x, y, z) számhármast, akkor azt tapasztaljuk, hogy mindig racionális számot kapunk. Ez nem véletlen, mert vegyük észre, hogy minden páronként különböző (x, y, z) számhármas esetén

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}=\left(\frac{1}{(x-y)}+\frac{1}{(y-z)}+\frac{1}{(z-x)}\right)^2$$

II. Az $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ polinom.

Az $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ azonosságot felhasználva:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^3+y^3+z^3-3xyz = \\ &= (x+y)^3+z^3-3xy(x+y)-3xyz = \\ &= (x+y+z)\left[(x+y)^2+z^2-(x+y)z\right]-3xy(x+y+z) = \\ &= (x+y+z)\cdot\left(x^2+y^2+2xy+z^2-xz-yz-3xy\right) = \\ &= (x+y+z)\cdot\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right). \end{aligned}$$

***Tehát*:**

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\cdot\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right) \qquad (1.)$$

Az $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$ azonosság szerint:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \qquad (2.)$$

Még egy alak hasznos lehet:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right] \qquad (3.)$$

(3.)- átalakításával:

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x) \qquad (4.)$$

Következmények:

I. Ha $x=y=z$, vagy $x+y+z=0$, akkor **(2.)** szerint

$$x^3+y^3+z^3=3xyz$$

II: Ha $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, akkor **(2.)** szerint

$$x + y + z = 0 \text{, vagy } x = y = z .$$

9. példa

Alakítsuk szorzattá:

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 =$$

Megoldás:

$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$, ezért I. szerint

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

5. feladat

Alakítsuk szorzattá:

$$(a+b)^3 (a-b)^3 + (b+c)^3 (b-c)^3 + (c+a)^3 (c-a)^3 =$$

10. példa

Oldjuk meg az egyenletet.

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$$

Megoldás:

I. szerint:

$$(x-1)+(x-2)+(x+3) = 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)(x+3)}$$
$$x^3 = (x-1)(x-2)(x+3)$$
$$x^3 = x^3 - 7x + 6$$
$$x = \frac{6}{7} .$$

11. példa

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert.

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ x^2+y^2+z^2&=14 \\ x^3+y^3+z^3&=36 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás:

Az első két egyenletből $xy+yz+zx=11$.

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right] \qquad (3.)$$

szerint $xyz=12$.
A t-re harmadfokú

$$t^3-(x+y+z)t^3+(xy+yz+zx)t^2-xzy=0$$

egyenlet gyökei x, y, z.

Tehát keressük a $t^3-6t^2+11t-6=0$ egyenlet gyökeit. Ezek 1, 2, 3.
Tehát x, y, z tetszőleges sorrendben 1, 2, 3.

12. példa

Oldjuk meg az egész számok halmazán.

$$x+y+z=7\,,$$
$$x^3+y^3+z^3=1\,.$$

Megoldás:

Használjuk fel a (4.)-ből következő azonosságot:

$$(x+y+z)^3-\left(x^3+y^3+z^3\right)=3(x+y)(y+z)(z+x)$$

Ez alapján $(x+y)(y+z)(z+x)=114=2\cdot 3\cdot 19$ és $(x+y)(y+z)(z+x)=14$
114 osztói ±1, ±2, ±3 ±6, ±19, ±38, ±57, ±114. Ezek közül kell három olyat

választani, amelyek szorzata 114, összege 14. Ezek csak -2, -3, 19 lehetnek. Ez a három szám lesz valamilyen sorrendben $(x+y)$, $(y+z)$ és $(z+x)$.

Ebből *x*, *y*, z-re 10, 9, -12 tetszőleges sorrendben jó.

13. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán.

$$\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{4x-1}\right)^3=3x+2\,.$$

Megoldás:

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x) \qquad (4.)$$

szerint, ha

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3\,,$$

akkor

$$(x+y)(y+z)(z+x)=0\,.$$

Így a fentiek egyenlet helyett megoldhatjuk a

$$\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x-3}\right)\left(\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt[3]{2x-3}\right)\left(\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[3]{x}\right)=0$$

Egyenletet, ami ekvivalens az

$$(x-3)(2x+2)(5x-1)=0$$

egyenlettel, amelynek gyökei $3;\ -1;\ \frac{1}{5}$.

6. feladat

Oldjuk meg a valós számok halmazán.

$$\left(x^2 - x + 2\right)^3 = x^6 - x^3 + 8$$

III. Ha *x*, *y*, *z* nemnegatív számok, akkor **(2.)** szerint:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

azaz

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}}$$

illetve

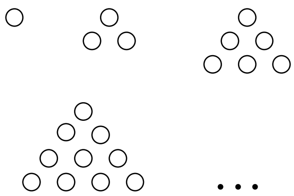
$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

További alkalmazások:

- *Desmond MacHale: My favourite polynomial, Mathematical Gazette*
- *Olosz Ferenc: Egy azonosság különböző alakjai,*
  Kolozsvári Matematikai Lapok

III. Háromszögszámok

A $h_n = \frac{n(n+1)}{2}$ *alakú (1, 3, 6, 10, …) számokat háromszögszámoknak nevezzük, mert 1, 3, 6, 10, … kavics háromszög alakú táblázatba helyezhető el:*



A következő három feladat a háromszögszámokkal kapcsolatos.

14. példa

Mutassuk meg, hogy a háromszögszámok között végtelen sok négyzetszám van.

Megoldás:

Az 1 háromszögszám is és négyzetszám is. Az $\frac{n(n+1)}{2} = k^2$ egyenletnek $n = 1$, $k = 1$ megoldása. Azt kell megmutatnunk, hogy az $\frac{n(n+1)}{2} = k^2$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a természetes számpárok halmazán. Az

$$n(n+1) = 2k^2 \qquad (*)$$

egyenletben két szomszédos szám szorzata egy négyzetszám kétszerese.

Elegendő megmutatni, hogy ha van ilyen (n; k) számpár, akkor meg tudunk adni egy nagyobb számokból álló, ilyen tulajdonságú párt is.

Ha a (*) egyenletet egy négyzetszámmal szorzom, akkor a jobb oldalon továbbra is egy négyzetszám kétszerese fog állni. Az egyenletet úgy akarjuk alakítani, hogy a bal oldalon is két szomszédos szám szorzata szerepeljen. Először szorozzuk mindkét oldalt 4-gyel!

$$4n^2 + 4n = 2\left(2k\right)^2 \qquad (**)$$

$4n^2+4n$ nagyobb szomszédja négyzetszám, ezért szorozzuk mindkét oldalt ($4n^2+4n+1$)-gyel!

$$\left(4n^2+4n\right)\left(4n^2+4n+1\right)=2\left[2k\left(2n+1\right)\right]^2$$

Egyenletünk újra a kívánt alakú: két szomszédos szám szorzata egy négyzetszám kétszerese. 2-vel osztva:

$$\frac{\left(4n^2+4n\right)\left(4n^2+4n+1\right)}{2}=\left[2k\left(2n+1\right)\right]^2$$

Tehát ha az n-edik háromszögszám megegyezik a k-adik négyzetszámmal: $\frac{n(n+1)}{2}=k^2$, akkor $\left(4n^2+4n\right)$-edik háromszögszám is megegyezik a $\left[2k\left(2n+1\right)\right]$-edik négyzetszámmal. Így minden ilyen tulajdonságú számhoz egy nagyobb ugyanilyen tulajdonságú számot tudunk rendelni, tehát valóban a háromszögszámok között végtelen sok négyzetszám van.

Az $n_1=1$, $k_1=1$ megoldásból a következő: $n_2=4n_1^2+4n_1=8$, $k_2=2k_1\left(2n_1+1\right)=6$.

Valóban $\frac{8\cdot 9}{2}=6^2=36$.

Az $n_2=8$, $k_2=1$ megoldásból a következő: $n_3=4n_2^2+4n_2=288$, $k_3=2k_2\left(2n_2+1\right)=204$.

Valóban $\frac{288\cdot 289}{2}=204^2=41616$.

Az $n_3=288$, $k_2=204$ megoldásból a következő: $n_4=4n_3^2+4n_3=332928$, $k_4=2k_3\left(2n_3+1\right)=235416$.

Valóban $\frac{332928\cdot 332929}{2}=235416^2=55420693056$.

Megjegyzés: A fenti módon nem kapunk meg minden olyan háromszögszámot, amely négyzetszám is. Pl. $n=49$, $k=35$ is megoldása a (*) egyenletnek: $\frac{49\cdot 50}{2}=35^2=1225$.

Ha az összes megoldásra kíváncsiak vagyunk, akkor a (**) sorban $x = 2n+1$, $y = 2k$ helyettesítést alkalmazva, az $x^2 - 2y^2 = 1$ Pell-egyenletet kapjuk, és ennek meg tudjuk határozni az összes megoldását.

15. példa

Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan háromszögszámokból álló pár van, amelyek összege is háromszögszám.

Megoldás:

A feladat valójában annak megmutatása, hogy az

$$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} = \frac{z(z+1)}{2}$$

egyenletnek végtelen sok (*x*, *y*, *z*) megoldása van természetes számokban.

Ezúttal is egy egyszerű, a középiskola alsóbb osztályaiban is alkalmazható megoldást mutatunk annak belátására, hogy van végtelen sok ilyen számhármas. Ezt a Pascal háromszög segítségével fogjuk megmutatni.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & \underline{\mathbf{1}} & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & \underline{\mathbf{3}} & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & \underline{\mathbf{6}} & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & \underline{\mathbf{10}} & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & \underline{\mathbf{15}} & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & \underline{\mathbf{21}} & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

A második oszlop az összes természetes számot, a harmadik oszlop az $\binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ háromszögszámokat tartalmazza. Ahol a második oszlopban 1-nél nagyobb háromszögszám van, (3, 6, ….) ott a mellette álló szám is mindig háromszögszám, és alattuk a kettő összege is háromszögszám.

<u>Megjegyzés</u>: Természetesen ezzel a módszerrel sem adtuk meg az egyenlet összes megoldását.
Keressünk olyan megoldást is, ahol *y* és *z* nem szomszédos számok!

Végezetül egy feladatban összekapcsoljuk a háromszögszámokat és a fentebb többször szerepelt, két négyzetszám összegeként felírható számokat.

7. feladat

a) n legyen olyan természetes szám, amely felírható két háromszögszám összegeként:

$$n = \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2}.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor $4n+1$ *felírható két négyzetszám összegeként.*

b) Mutassuk meg, hogy minden $4n+1$ *alakú, két négyzetszám összegeként felírható szám esetén n felírható két háromszögszám összegeként.*

IV. Még egy ötlet

Még egy feladatot adunk egy, a korábbi cikkben már bemutatott módszerre.

16. példa

Hány prímszám van 10001, 100010001, 1000100010001, … sorozatban?

Megoldás:

Megmutatjuk, hogy a sorozatban nincs prím.
10001= 73·137.

A többi szám $10^{4k} + 10^{4k-4} + ... + 10^8 + 10^4 + 1$ alakban írható, ahol $k > 1$.
Megmutatjuk, hogy $N = n^{4k} + n^{4k-4} + ... + n^8 + n^4 + 1$ nem lehet prím, ha $n > 1$ és $k > 1$.

Nem közvetlenül az N számot alakítjuk szorzattá, hanem előbb megszorozzuk $\left(n^4 - 1\right)$-gyel.

$$N\left(n^4-1\right) = \left(n^{4k} + n^{4k-4} + ... + n^8 + n^4 + 1\right)\left(n^4-1\right) = n^{4k+4} - 1 = \left(n^{2k+2}-1\right)\left(n^{2k+2}+1\right)$$

Látható, hogy N osztója az $\left(n^{2k+2}-1\right)\left(n^{2k+2}+1\right)$ szorzatnak. Ha N prím lenne, akkor osztója lenne valamelyik tényezőnek. De ez nem lehet, mert ha $n>1$ és $k>1$, akkor N nagyobb mindkét tényezőnél.