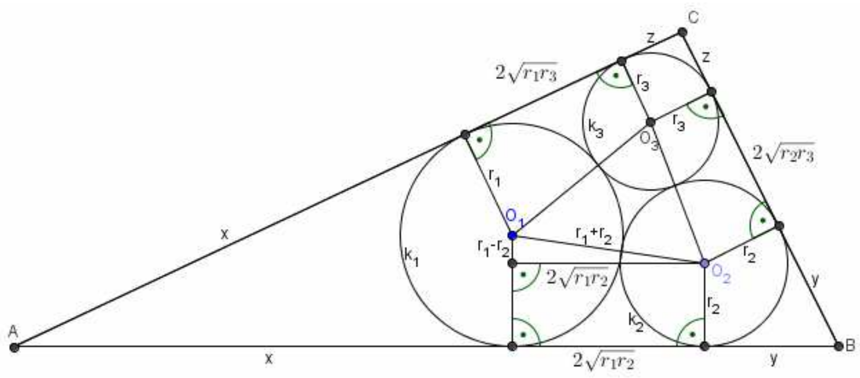
A Malfatti probléma

Fonyó Lajos, Keszthely

Giovanni Francesco Malfatti (1731-1807) olasz matematikus 1803-ban vetette fel az alábbi problémát:
Adott egy háromszög alapú egyenes hasáb márványból, melyből ki kell vágni három nem feltétlenül egybevágó egyenes körhenger alakú oszlopot úgy, hogy a keletkező hulladék minimális legyen.
Ez a gyakorlati probléma ekvivalens az alábbi síkgeometriai feladattal:
Adott *ABC* háromszögben adjuk meg azt a három nem feltétlenül azonos sugarú, egymást nem metsző kört, melyek területösszege maximális.
Malfatti és még sokan mások azt gondolták, hogy a probléma megoldása három olyan kör, melyek páronként érintik egymást és mindegyik érinti még a háromszög két oldalát.
A „Malfatti körök" megszerkesztése is komoly kihívás elé állította a matematikusokat. Először trigonometriai számításokon alapuló megoldások születtek, majd 1827-ben Steiner közölt egy tisztán elemi geometriai eljárást bizonyítás nélkül. Ennek helyességét végül Hart igazolta.

1. *Adott ABC háromszögbe szerkesszünk három egymást érintő kört, amelyek külön-külön még két-két háromszögoldalt is érintenek.*

I. megoldás:

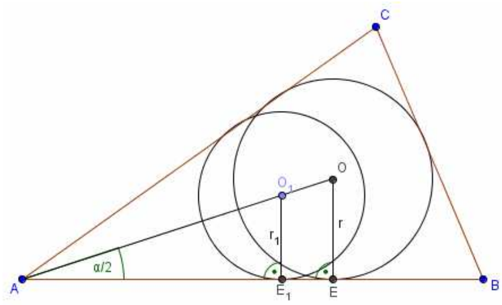


Jelöljük az *ABC* háromszög oldalainak hosszát *a*, *b*, *c*-vel, a k_1, k_2, k_3 Malfatti körök középpontjait O_1, O_2, O_3-mal, sugarait r_1, r_2, r_3-mal, az *A*, *B*, *C* csúcsoknak az érintési pontoktól mért távolságait *x*, *y*, *z*-vel.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az ABC háromszög félkerülete 1 egység. Használjuk fel, hogy két egymást érintő ρ_1 és ρ_2 sugarú kör közös külső érintőjének az érintési pontok közé eső szakasza $2\sqrt{\rho_1\rho_2}$ hosszúságú. Ez alapján

$$a = y + z + 2\sqrt{r_2 r_3}, \quad b = x + z + 2\sqrt{r_1 r_3}, \quad c = x + y + 2\sqrt{r_1 r_2}$$

Az ABC háromszög k beírt körének középpontját O-val, sugarát r-rel jelölve az ábra szerinti AE_1O_1 és AEO derékszögű háromszögek hasonlóságát kihasználva:



$$AE = s - a = 1 - a$$
$$\frac{r_1}{r} = \frac{x}{1-a}$$

Az ABC háromszög területének kétféle felírása alapján:

$$r \cdot s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}.$$

És így

$$r_1 = \frac{r}{1-a} \cdot x = \sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{(1-a)}} \cdot x.$$

Hasonlóképpen

$$r_2 = \frac{r}{1-b} \cdot y = \sqrt{\frac{(1-a)(1-c)}{(1-b)}} \cdot y$$

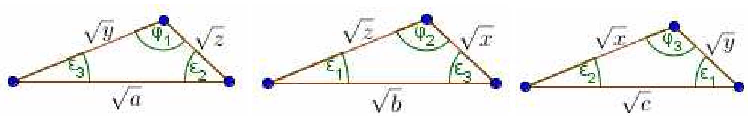
és

$$r_3 = \frac{r}{1-c} \cdot z = \sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{(1-c)}} \cdot z.$$

Ezen összefüggések felhasználásával az ABC háromszög oldalaira felírt kifejezések a koszinusztételre emlékeztető alakra írhatók át az alábbiak szerint:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2-2\sqrt{y}\sqrt{z}\left(-\sqrt{1-a}\right)$$
$$\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2-2\sqrt{x}\sqrt{z}\left(-\sqrt{1-b}\right)$$
$$\left(\sqrt{c}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}\left(-\sqrt{1-c}\right)$$

$a+b+c=2$ és a háromszög-egyenlőtlenség alapján $0<a<1$, $0<b<1$, $0<c<1$ és így $-1<-\sqrt{1-a}<0$, $-1<-\sqrt{1-b}<0$, $-1<-\sqrt{1-c}<0$, ezért léteznek olyan φ_1, φ_2, φ_3 tompaszögek, melyekre $\cos\varphi_1=-\sqrt{1-a}$, $\cos\varphi_2=-\sqrt{1-b}$ és $\cos\varphi_3=-\sqrt{1-c}$.



Az ábra szerint kialakított tompaszögű háromszögek körülírt körének sugara mindhárom esetben 1/2 egység, mivel pl.:

$$R_1=\frac{\sqrt{a}}{2\sin\varphi_1}=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{1-\cos^2\varphi_1}}=\frac{1}{2}$$

Tekintve a háromszögek azonos sugarú körülírt köreit, azokban az azonos hosszúságú oldalakhoz azonos kerületi szögek tartoznak, azaz $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ oldalakkal szemben rendre ε_1, ε_2, ε_3 szögek. Így az egyes tompaszögű háromszögek belső szögeinek összegére:

$$\varphi_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=180°,$$
$$\varphi_2+\varepsilon_1+\varepsilon_3=180°,$$
$$\varphi_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2=180°.$$

Ezekből az összefüggésekből

$$\varepsilon_1 = \frac{180° + \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{180° + \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3}{2},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{180° + \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

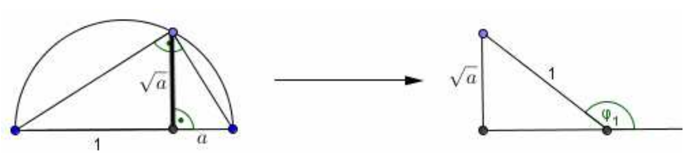
Figyelembe véve, hogy a körülírt kör sugara 1/2, ezért az egyes háromszögek oldalai és a szemközti szögek szinuszai közötti kapcsolatok:

$$\sqrt{a} = \sin\varphi_1,\ \sqrt{b} = \sin\varphi_2,\ \sqrt{c} = \sin\varphi_3,$$

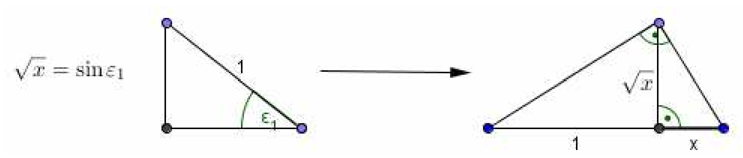
valamint

$$\sqrt{x} = \sin\varepsilon_1,\ \sqrt{y} = \sin\varepsilon_2,\ \sqrt{z} = \sin\varepsilon_3.$$

A magasságtétel és a Thálesz tétel alapján *a*, *b*, *c* ismeretében $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, majd φ_1, φ_2, φ_3 az ábra szerint megszerkeszthetők.



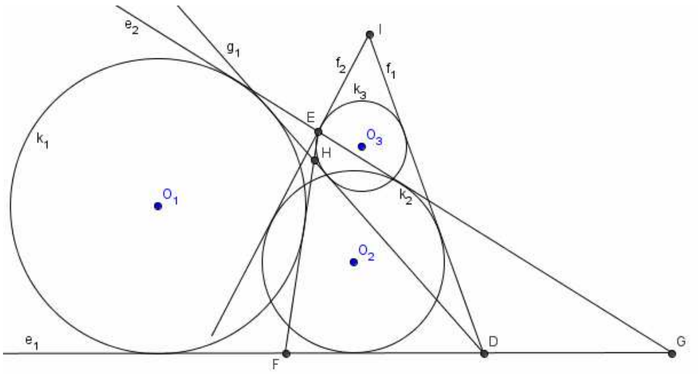
Az ε_1, ε_2, ε_3 szögek φ_1, φ_2, φ_3 segítségével a korábbi összefüggések alapján megszerkeszthetők és ezek segítségével előbb a $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$, majd az *x*, *y*, *z* hosszúságú szakaszok is az ábra szerint megkaphatók.



Az érintőszakaszok ismeretében a Malfatti körök már egyszerűen megszerkeszthetők.

II. megoldás:

1. segédtétel:



Ha a k_1, k_2 és k_2, k_3 körpárok közös külső érintői e_1, f_1 és a k_1, k_3 körpár közös belső érintője g_1 egy közös D pontban metszi egymást, akkor a megfelelő körök társérintői is közös pontba futnak össze.

Bizonyítás:

Legyen $e_1 \cap e_2 = G$, $g_1 \cap g_2 = H$, $f_1 \cap f_2 = I$ és $e_2 \cap f_2 = E$. Rajzoljuk meg a k_3 kör E pontbeli érintőjét és jelöljük ennek e_1-gyel való metszéspontját F-fel. Meg fogjuk mutatni, hogy az EF egyenes érinti a k_1 kört.
A k_2 kört érintő hurkolt $DIEG$ négyszögben: $DI + DG = EG + EI$.
A k_3 kört érintő $DIEH$ négyszögben: $DI + EH = DH + EI$.
A két egyenlet megfelelő oldalainak kivonásával és a kapott egyenlet rendezésével: $DG + DH = EG + EH$. Ez viszont azt jelenti, hogy a $DGEH$ négyszög oldalai egy kör érintői. Mivel a négyszög három oldala már érinti a k_1 kört, így az EH oldalnak is ugyanazt a kört kell érintenie. Ezzel az állítást beláttuk.

2. segédtétel:

Ha a k_1, k_2 körökből az A_1B_2 szelő két egyenlő hosszúságú $A_1B_1=A_2B_2$ húrt metsz ki, akkor a szelő két végpontjához húzott érintők M metszéspontjából a két kör egyenlő szög alatt látszik.

Bizonyítás:

Legyenel F_1, P, F_2 az O_1, M, O_2 pontok vetületei az A_1B_2 szelőn. Ekkor

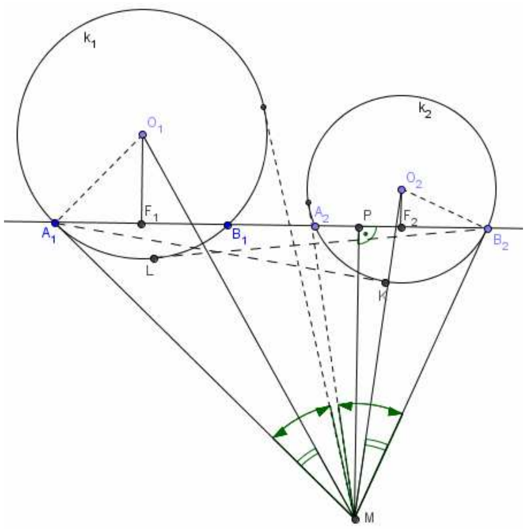
$$MPA_1\sphericalangle = A_1F_1O_1\sphericalangle = 90°$$

és

$$A_1MP\sphericalangle = O_1A_1F_1\sphericalangle$$

(merőleges szárú hegyesszögek).
Így $MPA_1\Delta \sim A_1F_1O_1\Delta$.
Hasonló gondolatmenettel

$$MPB_2\Delta \sim B_2F_2O_2\Delta.$$



A hasonlóságokat felhasználva

$$\frac{A_1M}{MP} = \frac{A_1O_1}{A_1F_1} \text{ és } \frac{MP}{B_2M} = \frac{B_2F_2}{B_2O_2}.$$

A két egyenlet összeszorzásával és felhasználva, hogy $A_1F_1 = B_2F_2$:

$$\frac{A_1M}{B_2M} = \frac{A_1O_1}{B_2O_2}.$$

Így az MO_1A_1 és MO_2B_2 derékszögű háromszögek hasonlóak és így $A_1MO_1\sphericalangle = B_2MO_2\sphericalangle$. A kapott egyenlőségeket 2-vel beszorozva éppen a kívánt állítást kapjuk.

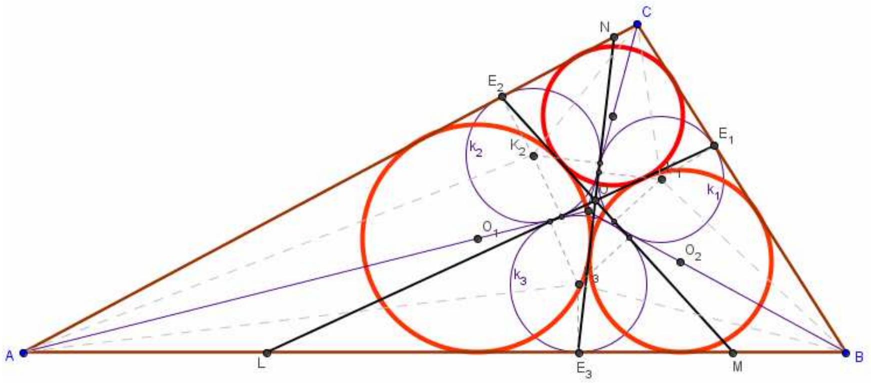
Következmény:
Jelöljük az A_1 és B_2 pontokból a k_2 és k_1 körökhöz húzott érintőszakaszok végpontjait K és L-lel. Ekkor $AK = \sqrt{A_1A_2 \cdot A_1B_2} = \sqrt{B_2B_1 \cdot B_2A_1} = B_2L.$

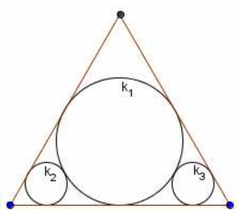
Megjegyzés: az állítás fordítva is igaz, ha az A_1B_2 szelő olyan, hogy az A_1K és B_2L érintőszakaszok egyenlő hosszúak, akkor a k_1, k_2 körökből kimetszett A_1B_1 és A_2B_2 húrok egyenlő hosszúságúak.

Ezután térjünk vissza a Malfatti körök megszerkesztéséhez.

Jelöljük a keresett Malfatti köröket o_1, o_2, o_3-mal, páronkénti érintési pontjaikat F, G, H-val! Mivel a körök közös belső érintői egyben hatványvonalai is a köröknek, ezért a három kör közös P hatványpontjában metszik egymást. Legyen R és S az a két pont, ahol az o_1 és o_2 körök érintik az AB oldalt, E_1, E_2, E_3 pontok pedig az ABC háromszög három szögfelező egyenese által képzett OAB, OBC és OCA háromszögekbe rajzolt k_1, k_2, k_3 érintőköröknek az oldalakon lévő érintési pontjai. Ekkor felhasználva, hogy egy külső pontból adott körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúságúak: $E_3M - E_3L = RM - LS = MH - LG = PM - PL$.
A kapott egyenlőség azt bizonyítja, hogy az LMP háromszögbe írt kör az LM oldalt E_3-ban érinti. Jelöljük ezt a kör k_3-mal és k_1, k_2-vel pedig azokat a hasonló köröket, amelyek az E_1 és E_2 pontban érintik a BC és AC oldalakat. Jelöljük az E_1P, E_2P, E_3P egyeneseknek az ABC háromszög oldalaival alkotott metszéspontját L, M, N-nel és E_3L-nek és E_3N-nek k_3-mal és k_1-gyel való érintési pontját U-val és V-vel. A k_1, k_3, o_2 körökből álló rendszert vizsgálva az E_1L, E_2M, E_3N közös érintők illeszkednek a P pontra, így az 1. segédtétel alapján társérintőik is közös ponton mennek át. Ez viszont azt jelenti, hogy a k_1 és k_3 körök közös belső érintője áthalad az AB és BC közös külső érintők B metszéspontján. Mivel $E_3F = E_3S = UG$ és $FV = E_1T = E_1G$, az egyenletek összeadásával $E_3V = E_1U$.
Ez a 2. segédtétel következménye alapján azt jelenti, hogy az E_1E_3 szakasz a k_1, k_3 körökből egyenlő hosszúságú szakaszokat metsz ki és ugyanezen segédtétel alapján a k_1 és k_3 közös belső érintője a B csúcsnál levő szög felező egyenese. Ez alapján a Steiner féle szerkesztés lépései:

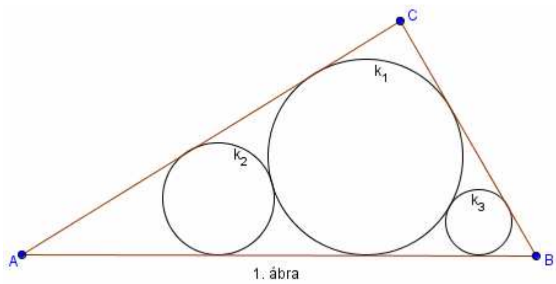
a) Megszerkesztjük az ABC háromszög beírt körének középpontját.
b) Megszerkesztjük az AOB, BOC, COA háromszögek k_1, k_2, k_3 beírt szögeit és meghatározzuk k_1, k_2, k_3-nak a háromszög oldalaival alkotott E_1, E_2, E_3 érintési pontjait.
c) E_1, E_2, E_3 pontokból megszerkesztjük a (k_2, k_3), (k_1, k_3), (k_1, k_2) körpárokhoz tartozó közös belső érintőket, melyek a Malfatti körök közös hatványpontjában metszik egymást.
d) A megrajzolt belső érintőkkel olyan háromszögeket kapunk, melyek mindegyikének egyik oldala az érintők egyike, másik két oldala pedig az ABC háromszög két oldala. Ezen háromszögek beírt körei lesznek a keresett Malfatti körök.



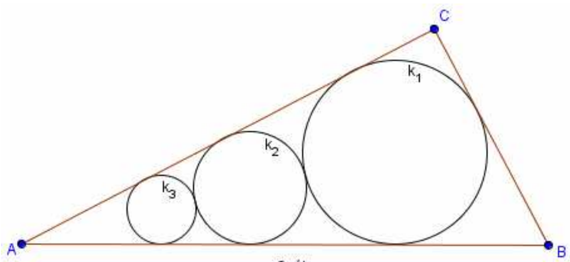


1929-ben Lob és Richmond megállapították, hogy a Malfatti körök nem minden esetben megoldásai a Malfatti problémának. Például az egyenlő oldalú háromszögben az ábra szerinti k_1, k_2, k_3 körök területösszege nagyobb, mint a Malfatti köröké.

1967-ben Goldberg már azt is igazolta, hogy a Malfatti körök egyik háromszög esetén sem szolgáltatják a Malfatti probléma megoldását. 1991-ben Zalgaller és Loss oldották meg általánosan a problémát.
25 oldalas bizonyításukban megmutatták, hogy amennyiben az *ABC* háromszög szögeire az $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ feltétel mellett a $\sin\frac{\alpha}{2} \geq tg\,\frac{\beta}{2}$ feltétel teljesül, akkor az 1., míg $\sin\frac{\alpha}{2} \geq tg\,\frac{\beta}{2}$ reláció esetén a 2. ábra szerinti k_1, k_2, k_3 körök területösszege maximális.



1. ábra

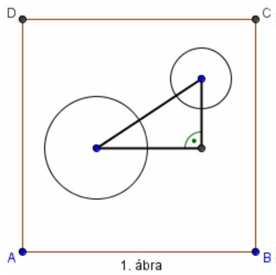


2. ábra

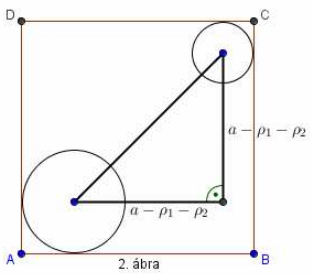
Kiss Sándor erdélyi magyar matematikus 2002-ben az Octogon Magazin IV. számában adott a problémára viszonylag rövid, elegáns megoldást.

2. *Egy adott négyzetben elhelyezünk két egymást nem metsző kört. Milyen esetben lesz maximális az általuk lefedett terület?*

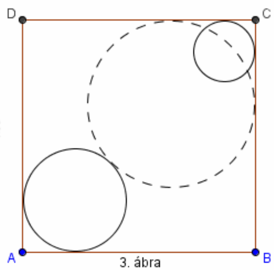
Megoldás:



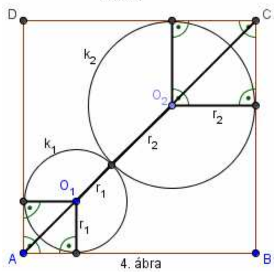
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

Jelöljük a négyzet csúcsait *A*, *B*, *C*, *D*-vel, oldalát pedig *a*-val, és helyezzünk el a négyzetben két tetszőleges egymást nem metsző ρ_1 és ρ_2 sugarú kört. Toljuk el a két kört úgy, hogy az egyiket a négyzet *AB* és *AD*, a másikat *CB* és *CD* oldala érintse. Az eltolások során a két kör középpontjának távolsága nem csökkenhet, mivel az 1. és 2. ábrák alapján az új helyzetben a két középpont távolsága két

$a-\rho_1-\rho_2$ befogójú derékszögű háromszög átfogójával megegyező hosszúságú, míg az eredeti helyzetben pedig egy olyan derékszögű háromszög átfogójával, amelyből a befogók hossza nem haladja meg a $a-\rho_1-\rho_2$ értéket. Így az elmozgatott körök továbbra sem metszik egymást és eredeti területük összege nem változik meg.

Ezután hajtsunk végre a *CB* és *CD* oldalakat érintő körnél egy *C* középpontú nagyítást úgy, hogy a kapott kör érintse a másikat. (3. ábra)

Az eljárás során kapott, egymást érintő két kör területének összege nyilván legalább akkora lesz, mint az eredetileg felvett két köré.

Jelöljük a kapott két kört k_1, k_2-vel, középpontjaikat O_1, O_2-vel. Mivel az *a* oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2}$ hosszúságú és O_1, O_2 rajta van az *AC* átlón, ezért

$$\sqrt{2}r_1+(r_1+r_2)+\sqrt{2}r_2=a\sqrt{2},$$

$$r_1+r_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}a=\left(2-\sqrt{2}\right)a.$$

A két kör területének összege

$$t_1+t_2=\pi\left(r_1^2+r_2^2\right).$$

Feladatunk tehát $r_1^2+r_2^2$ maximumának meghatározása.

Tegyük fel, hogy $r_1\le r_2$. Mivel mindkét kör része a négyzetnek, ezért $0\le r_1,r_2\le\frac{a}{2}$. Legyen

$$r_1=\frac{2-\sqrt{2}}{2}a-x \text{ és } r_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}a+x\text{, ahol } 0\le x\le\frac{\sqrt{2}-1}{2}a\,.$$

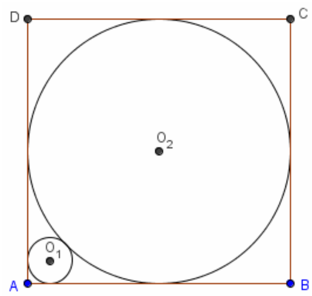
Ekkor

$$r_1^2+r_2^2=2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a\right)^2+2x^2.$$

$r_1^2+r_2^2$ pontosan akkor maximális,

ha $x=\frac{\sqrt{2}-1}{2}a$, azaz

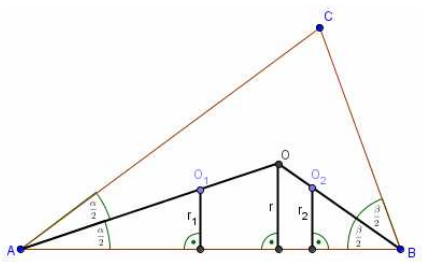
$$r_1=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}a \text{ és } r_2=\frac{a}{2}.$$



Tehát a két kör által lefedett terület akkor maximális, ha az egyik a négyzet beírt köre, a másik pedig a beírt kört és a négyzet két oldalát érintő kör.

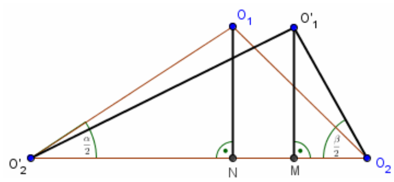
3. *Egy adott háromszögben elhelyezünk két egymást nem metsző kört. Milyen esetben lesz maximális az általuk lefedett terület?*

Megoldás:



Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C-vel, beírt körét k-val, annak középpontját és sugarát O-val, illetve r-rel. Legyenek a keresett körök k_1, k_2, középpontjaik O_1, O_2, sugaraik pedig r_1, r_2. Feltételezhetjük, hogy mindkét kör érinti a háromszögnek legalább két oldalát és egymást is, mivel ellenkező esetben a köröket eltolhatnánk úgy, hogy azok érintsék a háromszög két-két különböző oldalát és a középpontjaik távolsága eközben nem csökkenne, továbbá ha az egyik kört a megfelelő háromszög-csúcsból felnagyítanánk úgy, hogy érintse a másikat, akkor a két kör területösszege növekedne.

Tehát feltehetjük, hogy k_1 érinti az AB és AC, k_2 pedig az AB és BC oldalakat, továbbá k_1 és k_2 kívülről is érintik egymást. Ekkor O_1 és O_2 középpontok az A és B csúcsokhoz tartozó belső szögfelezőkön helyezkednek el.



Vizsgáljuk azt az esetet, amikor k_1 és k_2 egyike sem esik egybe k-val! Ekkor meg fogjuk mutatni, hogy létezik olyan k' kör r' sugárral az ABC háromszögön belül, amelyiknek nincs közös pontja k-val, továbbá k és k' területösszege nagyobb mint k_1 és k_2-é.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\alpha \leq \beta$. Ekkor szükségképpen $r_1 \leq r_2$, ugyanis $r_1 > r_2$ esetén tekintve azt a k_1' kört, aminek sugara $r_1' = r_2$ és érinti az AB, BC oldalakat, és azt a k_2' kört, aminek a sugara $r_2' = r_1$ és érinti az AB, AC oldalakat.Ekkor $r_1' \leq r_2'$, és k_1', k_2' területösszege annyi mint k_1, k_2-é. Továbbá a 2. ábra alapján:

$$O_1'O_2' = \frac{O_1'M}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{O_1N}{\sin\frac{\alpha}{2}} \geq \frac{O_1N}{\sin\frac{\beta}{2}} = O_1O_2 \geq r_1 + r_2 = r_1' + r_2'.$$

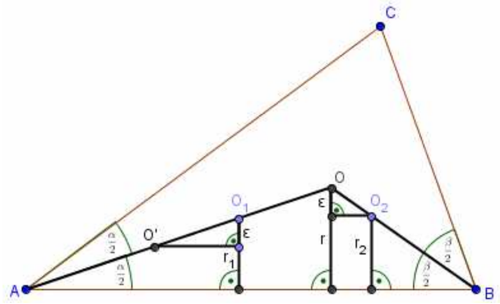
Tehát k_1' és k_2' köröknek nincs közös pontja. Így élhetünk azzal a feltételezéssel, hogy $\alpha \le \beta$ esetén $r_1 \le r_2$. Legyen $\varepsilon = r - r_2 > 0$. Ha $r_1 < \varepsilon$, akkor $r_1 + r_2 \le r$ és $r_1^2 + r_2^2 < (r_1 + r_2)^2 \le r^2$, ami azt jelenti, hogy k_1 és k_2 területösszege kisebb mint *k*-é.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $r_1 > \varepsilon > 0$. Legyen $r' = r_1 - \varepsilon > 0$ és *k*' az α szög szárait érintő *r*' sugarú kör. Ekkor

$$r^2 + (r')^2 = (r_2 + \varepsilon)^2 + (r_1 - \varepsilon)^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2\varepsilon(r_2 - r_1) + 2\varepsilon^2 > r_1^2 + r_2^2$$

és már csak azt kell belátni, hogy *k*-nak és *k*'-nek nincs közös pontja. Használjuk fel, hogy

$$OO_2 = \frac{\varepsilon}{\sin\frac{\beta}{2}} \le \frac{\varepsilon}{\sin\frac{\alpha}{2}} = O_1O'$$



Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján:

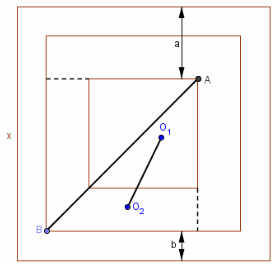
$$OO' = OO_1 + O_1O' \ge OO_1 + OO_2 \ge O_1O_2$$

Tehát *k* és *k*' köröknek nincs közös pontja.

A korábbi eredményeinket összefoglalva, az *ABC* háromszögben elhelyezett két egymást nem metsző körnek a területösszege pontosan akkor maximális, ha az egyik a háromszög beírt köre, a másik pedig érinti a beírt kört és a háromszög legkisebb szögéhez tartozó két oldalt.

4. *Mekkora annak a legkisebb méretű négyzetnek az oldala, amelyben elhelyezhető két egymást nem metsző a és b sugarú kör?*

Megoldás:



Jelöljük a keresett *N* négyzet oldalának hosszát *x*-szel, az *a* és *b* sugarú köröket k_1, k_2-vel, középpontjaikat O_1, O_2-vel. Tegyük fel, hogy $a \ge b$! Ekkor O_1 és O_2 benne vannak olyan N_1 és N_2

négyzetekben, amelyek maguk is benne vannak N-ben és oldalaik N oldalaitól a és b távolságra vannak. Jelöljük A, B-vel N_1 és N_2 két azon átellenes helyzetű csúcsát, amelyekre az AB átlójú négyzet tartalmazza az O_1O_2 szakaszt. Ekkor

$$O_1O_2 \le AB = \sqrt{2}\left(x-a-b\right)$$

Másrészt mivel k_1 és k_2 körök nem metszők $O_1O_2 \ge a+b$.

Így $\sqrt{2}\left(x-a-b\right) \ge a+b$, amiből $x \ge \frac{2+\sqrt{2}}{2}\left(a+b\right)$. Továbbá mivel a k_1 kör benne van az N négyzetben: $x \ge 2a$. Ha $\frac{2+\sqrt{2}}{2}\left(a+b\right) \ge 2a$, azaz $\left(\sqrt{2}+1\right)^2 b \ge a \ge b$ az N négyzet oldala $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\left(a+b\right)$.

Az egyenlőség is fennállhat, pl. $O_1 = A$, $O_2 = B$ választás esetén.

Ha $\frac{2+\sqrt{2}}{2}\left(a+b\right) < 2a$, akkor $x = 2a$.

Eredményeinket összefoglalva:

$$x = \begin{cases} \frac{2+\sqrt{2}}{2}\left(a+b\right), & \text{ha } b \le a \le \left(\sqrt{2}+1\right)^2 b \\ 2a, & \text{ha } \left(\sqrt{2}+1\right)^2 b < a \end{cases}$$

5. *Mekkora annak a legkisebb méretű szabályos háromszögnek az oldala, amelyben elhelyezhető két egymást nem metsző a és b sugarú kör?*

Megoldás:

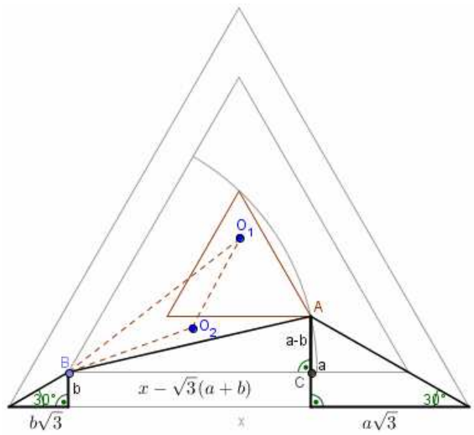
Jelöljük a keresett H szabályos háromszög oldalának hosszát x-szel, az a, b sugarú köröket k_1, k_2-vel, középpontjaikat O_1, O_2-vel.

Tegyük fel, hogy $a \ge b$. Ekkor O_1 és O_2 benne vannak olyan H_1 és H_2 szabályos háromszögekben, amelyek maguk is benne vannak H-ban és oldalaik H-tól a és b távolságra vannak. Jelöljük A-val és B-vel H_1 és H_2 azon két csúcsát, melyekre teljesül, hogy O_1 és O_2 benne vannak a B középpontú BA sugarú kör H_2-höz tartozó körcikkében. (Ilyen csúcsok mindig kiválaszthatók H_1, H_2-nél.)

Mivel a k_1 és a k_2 körök nem metszők, ezért $O_1O_2 \ge a+b$.

Másrészt $AB \geq O_1O_2$, mivel $AB < O_1O_2$ esetén a BO_2O_1 háromszögben O_1O_2 lenne a legnagyobb oldal, és azzal szemben 60°-nál nagyobb szögnek kellene lenni, viszont $O_1BO_2\sphericalangle \leq 60°$. Így $AB \geq a+b$.
Az ábrán kialakított ABE derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz tételt

$$(a+b)^2 \leq AB^2 = (a-b)^2 + \left[x-\sqrt{3}(a+b)\right]^2.$$



Ebből

$$x \geq \sqrt{3}(a+b) + 2\sqrt{ab}$$

adódik.
Továbbá mivel a k_1 kör benne van a H szabályos háromszögben

$$a \leq \frac{x\sqrt{3}}{6}, \text{ azaz } x \geq 2\sqrt{3}a.$$

Ha

$$\sqrt{3}(a+b) + 2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{3}a,$$

azaz

$$0 \geq \sqrt{3}\frac{a}{b} - 2\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \leq \sqrt{3}$$

$b \leq a \leq 3b$,

akkor a H szabályos háromszög oldala $x = \sqrt{3}(a+b) + 2\sqrt{ab}$. Az egyenlőség fennállhat, pl. $O_1 = A$, $O_2 = B$ választás esetén.
Ha $a > 3b$, akkor $x = 2\sqrt{3}a$.
Eredményünket összefoglalva:

$$x = \begin{cases} \sqrt{3}(a+b) + 2\sqrt{ab}, & \text{ha } b \leq a \leq 3b \\ 2\sqrt{3}a, & \text{ha } 3b < a \end{cases}$$

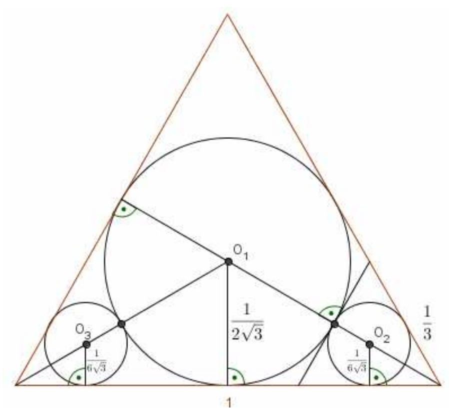
6. *Mutassuk meg, hogy az egyenlő oldalú háromszögben a Malfatti probléma megoldása a beírt kör és két olyan kör, amelyek érintik a beírt kört és a háromszög két-két oldalát.*

Megoldás:

Válasszuk a szabályos háromszög oldalát egység hosszúságúnak. Tegyük fel, hogy az egymást nem metsző k_1, k_2, k_3 körök sugaraira az $a \geq b \geq c$ nagyságrend teljesül. Azt fogjuk belátni, hogy

$$a = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,,\ b = \frac{1}{6\sqrt{3}}\,,\ c = \frac{1}{6\sqrt{3}}\,.$$

Ennek igazolásához meg fogjuk mutatni, hogy teljesül az



$$a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{11}{108}$$

egyenlőtlenség.
Két esetet fogunk vizsgálni:
1. eset: $a \geq 3b$

Felhasználva, hogy $a \leq \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2 + 2b^2 \leq a^2 + \frac{2}{9}a^2 \leq \frac{11}{9}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{11}{108}$$

Az egyenlőség feltétele:

$$a = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,,\ b = c = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

2. eset: $b \leq a \leq 3b$
Legyen $b = 3x^2b$, ahol $x > 0$.

Ekkor az a és b között feltételezett nagyságrend alapján: $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq 1$.

Az 5. feladat megoldása alapján ekkor

$$\sqrt{3}\left(a+b\right)+2\sqrt{ab}\le 1,$$
$$\sqrt{3}\left(3x^2+1\right)b+2\sqrt{3}xb\le 1,$$
$$b\le \frac{1}{\sqrt{3}\left(3x^2+2x+1\right)}.$$

Ennek figyelembe vételével

$$a^2+b^2+c^2\le a^2+2b^2=\left(9x^4+2\right)b^2=\frac{9x^4+2}{3\left(3x^2+2x+1\right)^2}.$$

Így elegendő belátnunk, hogy $\frac{9x^4+2}{\left(3x^2+2x+1\right)^2}\le \frac{11}{36}$.

Az $\frac{1}{\sqrt{3}}\le x\le 1$ feltétel miatt

$$225x^4-132x^3-110x^2-44x+61\le 0,$$
$$\left(x-1\right)\left(225x^3+93x^2-17x-61\right)\le 0.$$

Az $x-1\le 0$ és

$$225x^3+93x^2-17x-61=51x\left(x^2-\frac{1}{3}\right)+174x^3+93x^2-61\ge$$
$$\ge \frac{174}{3\sqrt{3}}+\frac{93}{3}-61=\frac{174-90\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}>0$$

egyenlőtlenségek alapján az állítást igazoltuk.

Az egyenlőség feltétele: $x=1$, $b=c=\frac{1}{\sqrt{3}\left(3x^2+2x+1\right)}$, ami éppen azt jelenti, hogy

$$a=\frac{1}{2\sqrt{3}},\ b=c=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

Gyakorló feladatok:

7. *Határozzuk meg a Malfatti körök sugarát az egység oldalú szabályos háromszögben és mutassuk meg, hogy azok nem megoldásai a Malfatti problémának.*

8. *Adott négyzetbe helyezzünk el két egymást nem metsző r_1 és r_2 sugarú kört. Határozzuk meg*
a) $r_1 \cdot r_2$ *maximumát,*
b) $r_1^3 + r_2^3$ *maximumát.*

9. *Adott háromszögben helyezzünk el két egymást nem metsző kört. Határozzuk meg, mely esetben lesz a területük szorzata maximális.*

10. *Helyezzünk el adott téglalapban két egymást nem metsző kört úgy, hogy*
a) területük összege,
b) területük szorzata maximális legyen.

11. *Határozzuk meg annak a legkisebb méretű négyzet oldalainak hosszát, amelyben elhelyezhető két egymást nem metsző* $\sqrt{2}$ *és 2 egység sugarú kör.*

12. *Határozzuk meg annak a legkisebb méretű négyzet oldalának hosszát, amelyben elhelyezhető három egymást nem metsző 1,* $\sqrt{2}$ *és 2 egység sugarú kör.*

13. *Határozzuk meg annak a legkisebb méretű szabályos háromszögnek oldalhosszát, amelyben elhelyezhető három egymást nem metsző 2, 3 és 4 egység sugarú kör.*

14. *Oldjuk meg a Malfatti problémát egy négyzetben elhelyezett három egymást nem metsző körre.*

15. *Határozzuk meg annak a legkisebb méretű négyzetnek oldalhosszát, amelyben elhelyezhető öt egymást nem metsző egység sugarú kör.*

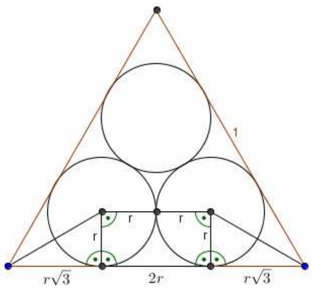
16. *Adott kockába helyezzünk el két egymást nem metsző gömböt úgy, hogy*
a) felszínük összege,
b) térfogatuk összege maximális legyen.

17. *Határozzuk meg annak a legkisebb méretű kockának élhosszát, amely tartalmaz két egymást nem metsző a és b sugarú gömböt.*

18. *Határozzuk meg annak a legkisebb méretű kockának az élhosszát, amely tartalmaz kilenc egymást nem metsző egység sugarú gömböt.*

Gyakorló feladatok megoldásai:

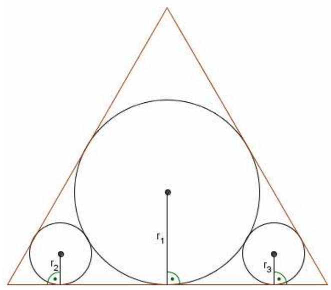
7. A $2\sqrt{3}r+2r=1$ összefüggés alapján a Malfatti körök sugara: $r=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.



A Malfatti körök területösszege:

$$3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2\cdot\pi=\frac{3\pi}{8}\left(2-\sqrt{3}\right)\approx 0,3157.$$

A 6. feladat alapján a megoldást szolgáltató körök sugara $r_1=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, $r_2=r_3=\dfrac{1}{6\sqrt{3}}$.



A körök területösszege

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2\pi+2\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^2\pi=\frac{11\pi}{108}\approx 0,3200.$$

Tehát $\dfrac{3\pi}{8}\left(2-\sqrt{3}\right)<\dfrac{11\pi}{108}$.

8. A 2. feladat megoldása alapján a körök r_1, r_2 sugarára $r_1+r_2=\left(2-\sqrt{2}\right)a$ és $0<r_1, r_2\le\dfrac{a}{2}$, ahol a jelöli a négyzet oldalát.

a) A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség alapján

$$r_1r_2\le\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2\le\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2a^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}a^2$$

r_1r_2 pontosan akkor maximális, ha $r_1=r_2=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}a$.

b) $$r_1^3+r_2^3=(r_1+r_2)\left(r_1^2-r_1r_2+r_2^2\right)=\frac{r_1+r_2}{2}\left[3r_1^2+3r_2^2-\left(r_1^2+2r_1r_2+r_2^2\right)\right]=$$
$$=\frac{r_1+r_2}{2}\left[3\left(r_1^2+r_2^2\right)-(r_1+r_2)^2\right].$$

Mivel $r_1+r_2=\left(2-\sqrt{2}\right)a$ állandó érték, ezért $r_1^3+r_2^3$ pontosan akkor maximális, ha $r_1^2+r_2^2$ maximális.

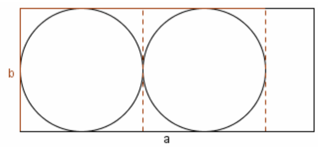
A 2. feladat megoldása alapján ez $r_1 \le r_2$ esetén az $r_1=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}a$ és $r_2=\frac{a}{2}$ értékeknél teljesül. Ekkor $r_1^3+r_2^3=\frac{50-35\sqrt{2}}{4}a^3$.

9. A megoldást jelentő körök érintik egymást és a háromszög két-két oldalát. A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget használva

$$t_1t_2=\pi^2r_1^2r_2^2\le\pi^2\left(\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\right)^2.$$

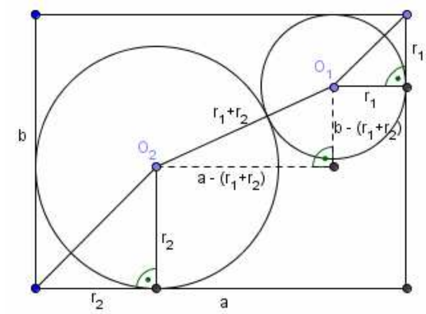
Így a területük szorzata pontosan akkor maximális, ha $r_1^2+r_2^2$ értéke a lehető legnagyobb.
A 3. feladat alapján a megoldást két olyan egymást érintő kör adja, melyek közül az egyik a beírt kör, a másik pedig érinti a háromszög legkisebb szögéhez tartozó két oldalt.

10. Tegyük fel, hogy a téglalap a és b oldalaira teljesül, hogy $a \ge b$.
Ha $a \ge 2b$, akkor elhelyezhetünk a téglalapban két egymást nem metsző $\frac{a}{2}$ sugarú kört, és így lesz a körök területének összege maximális.

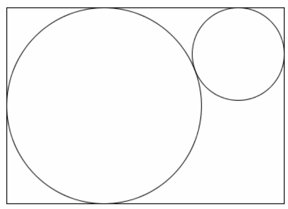


A $b \le a \le 2b$ esetben a 2. feladat alapján elegendő olyan köröket vizsgálnunk, melyek érintik egymást és a téglalap két-két szemközti oldalát.

Ekkor az ábra alapján:



$$(r_1+r_2)^2=\left[a-(r_1+r_2)\right]^2+\left[b-(r_1+r_2)\right]^2$$
$$r_1+r_2=a+b-\sqrt{2ab}$$



$r_1\le r_2,\ 0<r_1,\ r_2\le\dfrac{b}{2}$ esetén legyen

$$r_1=\frac{a+b-\sqrt{2ab}}{2}-x \text{ és } r_2=\frac{a+b-\sqrt{2ab}}{2}+x,$$

ahol

$$0\le x\le\frac{\sqrt{2ab}-a}{2}.$$

Ekkor

$$r_1^2+r_2^2=2\left(\frac{a+b-\sqrt{2ab}}{2}\right)^2+2x^2.$$

$r_1^2+r_2^2$ pontosan akkor maximális, ha $x=\dfrac{\sqrt{2ab}-a}{2}$, azaz

$$r_1=a+\frac{b}{2}-\sqrt{2ab} \text{ és } r_2=\frac{b}{2}.$$

b) A

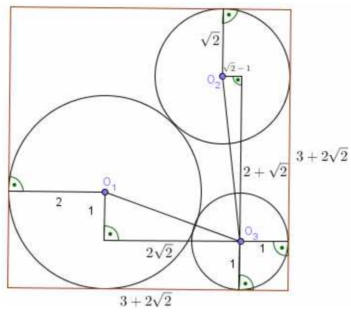
$$t_1 t_2 = \pi^2 r_1^2 r_2^2 \le \pi^2 \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} \right)^2$$

átalakítás alapján a területek szorzata pontosan akkor a lehető legnagyobb, amikor a területük összege maximális.

11. A 4. feladat megoldása alapján a keresett négyzet oldalának hossza

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2}\left(2+\sqrt{2}\right) = 3+2\sqrt{2}.$$

12. A 11. feladat alapján az $r_1 = 2$, $r_2 = \sqrt{2}$ sugarú egymást nem metsző köröket tartalmazó legkisebb méretű négyzet oldalának hossza $3+2\sqrt{2}$. Ebben a négyzetben az ábra szerint még elhelyezhető egy olyan $r_3 = 1$ sugarú kör is, amely nem metszi a másik kettőt, mivel



$$O_1O_3 = \sqrt{1^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 3 = r_1 + r_3$$

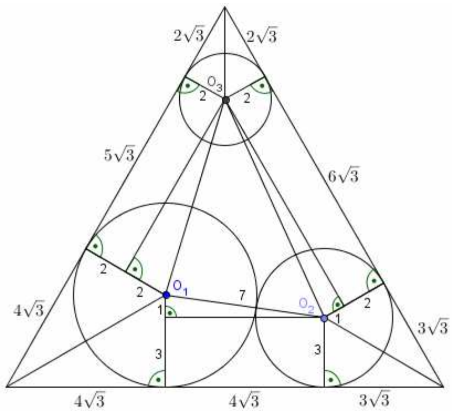
és

$$O_2O_3 = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + \left(2+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{9+2\sqrt{2}} > r_2 + r_3.$$

Tehát a keresett négyzet oldalának hossza $3+2\sqrt{2}$.

13. Az 5. feladat megoldása alapján az $r_1 = 4$, $r_2 = 3$ sugarú egymást nem metsző köröket tartalmazó legkisebb méretű szabályos háromszög oldalának hossza

$$\sqrt{3}(4+3)+2\sqrt{4\cdot 3}=11\sqrt{3}\,.$$



Ebben a szabályos háromszögben az ábra szerint még elhelyezhető egy olyan $r_3 = 2$ sugarú kör is, amely nem metszi a másik kettőt, mivel

$$O_1O_3=\sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{79}>r_1+r_3$$

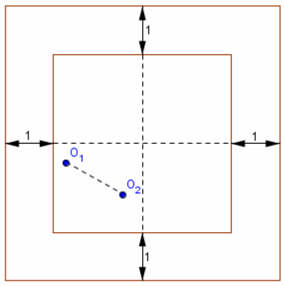
és

$$O_2O_3=\sqrt{\left(6\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{109}>r_2+r_3$$

Tehát a keresett szabályos háromszög oldalának hossza $11\sqrt{3}$.

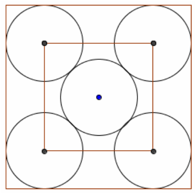
14. Használjuk a 4. feladat eredményeit és a 6. feladat megoldási módszerét.

15. Tegyük fel, hogy az öt egymást nem metsző kör elhelyezhető egy a oldalú négyzetben. Ekkor $a \geq 2$ és a körök középpontjai benne vannak egy $a-2$ oldalhosszúságú négyzetben.



Osszuk fel ezt az utóbbi négyzetet négy darab $\frac{a-2}{2}$ oldalhosszúságú négyzetre a középponton áthaladó oldalakkal párhuzamos vágásokkal. A skatulyaelv értelmében ekkor biztosan lesz olyan kis négyzet, amelybe legalább két kör középpontja kerül. Ha ezek a középpontok O_1 és O_2, akkor mivel nem metszik egymást, ezért $O_1O_2 \geq 2$. Másrészt $O_1O_2 \leq \frac{a-2}{2}\sqrt{2}$.

Így $\frac{a-2}{2}\sqrt{2} \geq 2$, amiből $a \geq 2+2\sqrt{2}$.



A 2. ábra alapján az $a = 2 + 2\sqrt{2}$ oldalú négyzetben el is helyezhető az öt egymást nem metsző egység sugarú kör.

16. Elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor a két gömb érinti egymást és a kocka két átellenes csúcsára illeszkedő 3-3 lapot.
Jelöljük a kocka élét *a*-val, a körök sugarát r_1, r_2-vel, felszínét A_1, A_2-vel, térfogatát V_1, V_2-vel.
Ekkor:

$$\sqrt{3}\mathrm{r}_1 + \left(\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2\right) + \sqrt{3}\mathrm{r}_2 = \sqrt{3}a,$$

$$r_1 + r_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}a = \frac{3-\sqrt{3}}{2}a.$$

a) $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = 4\pi\left(\mathrm{r}_1^2 + \mathrm{r}_2^2\right)$

Feladatunk tehát $\mathrm{r}_1^2 + \mathrm{r}_2^2$ maximumának meghatározása.
Legyen

$$r_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}a - x \text{ és } r_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}a + x,$$

ahol

$$0 < r_1 \le r_2 \le \frac{a}{2} \text{ és } 0 \le x \le \frac{3-\sqrt{3}}{4}a.$$

Ekkor

$$\mathrm{r}_1^2 + \mathrm{r}_2^2 = 2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}a\right)^2 + 2x^2,$$

így $\mathrm{r}_1^2 + \mathrm{r}_2^2$ pontosan akkor maximális, ha $x = \frac{\sqrt{3}-1}{4}a$, azaz

$$r_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a \text{ és } r_2 = \frac{a}{2}.$$

Tehát a két gömb felszínének összege pontosan akkor maximális, ha az egyik a kocka beírt gömbje, a másik pedig a beírt gömböt és a kocka 3 lapját érintő gömb. Ekkor $A_1 + A_2 = \left(8 - 4\sqrt{3}\right)\pi a^2$.

b) $V_1^3 + V_2^3 = \frac{4\pi}{3}\left(r_1^3 + r_2^3\right)$

Feladatunk tehát $r_1^3 + r_2^3$ maximumának meghatározása.

$$r_1^3 + r_2^3 = \frac{r_1 + r_2}{2}\left[3\left(r_1^2 + r_2^2\right) - \left(r_1 + r_2\right)^2\right]$$

Mivel $r_1 + r_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}a$ állandó érték, ezért $r_1^3 + r_2^3$ pontosan akkor a legnagyobb, ha $r_1^2 + r_2^2$ maximális, azaz az a) eset alapján $r_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$ és $r_2 = \frac{a}{2}$ esetén. Ekkor $V_1 + V_2 = \frac{9-5\sqrt{3}}{2}\pi a^3$.

17. Jelöljük a keresett K kocka éleinek hosszát x-szel, az a és b sugarú gömböket g_1, g_2-vel, középpontjaikat O_1, O_2-vel. Tegyük fel, hogy $a \geq b$! Ekkor O_1 és O_2 benne vannak olyan K_1 és K_2 kockákban, amelyek maguk is benne vannak K-ban és lapjaik K lapjaitól a és b távolságra vannak.
Jelöljük A, B-vel K_1 és K_2 azon két átellenes csúcsát, melyekre az AB testátlójú kocka tartalmazza az O_1O_2 szakaszt. Ekkor $O_1O_2 \leq AB = \sqrt{3}\left(x - a - b\right)$.
Másrészt mivel g_1 és g_2 gömbök nem metszők, $O_1O_2 \geq a + b$.
Így $\sqrt{3}\left(x - a - b\right) \geq a + b$, amiből $x \geq \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(a+b\right)$. Továbbá mivel a g_1 gömb benne van a K kockában: $x \geq 2a$. Ha $\frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(a+b\right) \geq 2a$, azaz $\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{6}b \geq a \geq b$, akkor a K kocka oldala $x = \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(a+b\right)$. Az egyenlőség is fennállhat, pl. O_1 = A és O_2 =B választás esetén.
Ha $\frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(a+b\right) < 2a$, akkor $x = 2a$.

Eredményeinket összefoglalva:

$$x=\begin{cases}\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}(a+b), \text{ ha } b\le a\le \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{6}b\\ 2a, \text{ ha } \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{6}b<a\end{cases}$$

18. Tegyük fel, hogy a kilenc egymást nem metsző egység sugarú gömb elhelyezhető egy a élű kockában. Ekkor $a\ge 2$ és a gömbök középpontjai benne vannak egy $a-2$ élű kockában. Osszuk fel ez utóbbi kockát nyolc darab $\frac{a-2}{2}$ élű kockára a középpontján áthaladó lapjaival párhuzamos vágásokkal. A skatulyaelv értelmében ekkor biztosan lesz olyan kis kocka, amelybe legalább két gömb középpontja kerül. Ha ezek a középpontok O_1 és O_2, akkor figyelembe véve, hogy a gömbök nem metszők: $2\le O_1O_2\le \frac{a-2}{2}\sqrt{3}$, amiből $\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{3}\le a$. Az $a=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{3}$ élhosszúságú kockában el is helyezhető a kilenc egység sugarú gömb, ha a gömbök középpontjait az $\frac{a-2}{2}$ élű kocka csúcsaiban és középpontjában helyezzük el.