Polinomalgebra elemei (megoldások, megoldás vázlatok)

I. Egész együtthatós polinomok

1. Tudjuk, hogy *a-b*|*p(a)-p(b)*, ahol *a, b* egész számok, míg *p(x)* egész együtthatós polinom. Emiatt *n*-1|*p(n)-p(1)* és *n*|*p(n)-p*(0), tehát *n*-1|2000 és *n*|1991.

   Az 1991 pozitív osztói: 1, 11, 181, 1991. Ezek közül csak a 11-re teljesül, hogy belőle 1-et kivonva a kapott szám osztója a 2000-nek. Tehát az *n*=11 jó lehet. Nézzük meg, hogy létezik-e hozzá megfelelő polinom? Könnyen lehet találni ilyen egész együtthatós másodfokú polinomot pl. $p(x) = 19x^2 - 28x + 20$, ugyanis *p*(0)=20, *p*(1)=19-28+20=11 és

   p(11)=19 $\cdot$ 121-28 $\cdot$ 11+20=2011.

2. Tudjuk, hogy létezik olyan *n* egész hely, ahol *p*(*n*)=1967. Legyen $x_1, x_2, ..., x_k$ *k* db különböző egész szám, melyekre teljesül, hogy a *p* polinom ezeken a helyeken -44-et vesz fel! Tekintsük a *q(x)=p(x)*+44 polinomot. Ennek a polinomnak az $x_1, x_2, ..., x_k$ számok gyökei, így felírható $q(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k) \cdot r(x)$ alakban.

   Így $q(n) = (n - x_1)(n - x_2)...(n - x_k) \cdot r(n) = p(n) + 44 = 2011$, ahol $(n - x_1),\ (n - x_2),\ ...,\ (n - x_k)$ páronként különböző egész számok. Mivel a 2011 prím, ezért csak 2011=1 $\cdot$ (-1) $\cdot$ (-2011) módon írható fel különböző egész számok szorzataként. Tehát legfeljebb három különböző egész helyen veheti fel *p* a -44-et. Ilyen polinom van pl. $p(x) = x^3 - 2011x^2 - x + 1967$. Erre a polinomra p(0)=1967, p(-1)=p(1)=p(2011)=-44.

3. Tegyük fel, hogy van egész gyöke, legyen ez *k*! Ekkor *P(x)=(x-k)* $\cdot$ *q(x)*. Írjuk fel *k*-t *k=n* $\cdot$ *2011+m* alakban, ahol *m* legyen 2011-nél nem kisebb pozitív egész szám. Ekkor *P(m)=(m-k)* $\cdot$ *q(m),* ami osztható 2011-gyel és a megadott számok egyike, ami ellentmondás, tehát nincs egész gyöke a polinomnak.

   Megjegyzés: A feladat általánosítható.

   A *p* egész együtthatós polinomról tudjuk, hogy *p(1), p(2), ...,p(n*) egyike sem osztható n-nel, ahol n egész szám. Legfeljebb hány egész gyöke lehet a polinomnak?

4. Mivel *p* polinom, ezért ha van racionális gyöke, akkor az csak egész szám lehet. Tegyük fel, hogy *a, b, c* három egész gyöke a polinomnak. Ekkor p(x)=(x-a)(x-b)(x-c). A Viète-formulák alapján *abc*=*d*, *ab*+*bc*+*ca*=-2010 és *a*+*b*+*c*=2010. Az nem lehet, hogy mindhárom gyök, vagy pontosan az egyik legyen páratlan, mert összegük páros, az sem lehet, hogy pontosan egy páros legyen köztük, mert akkor az *ab*+*bc*+*ca* összeg páratlan lenne. Így marad az, hogy mindhárom páros, de akkor az ab+bc+ca összeg osztható lenne 4-gyel, ami a -2010-ra nem teljesül.

5. Gondoljuk meg, hogy bármely *k* szám esetén *f(x) n*-edfokú polinom felírható *x-k* polinomjaként! Tekintsük ezt az alakot

   $f(x) = b_n(x-k)^n + b_{n-1}(x-k)^{n-1} + ... + b_1(x-k) + b_0$, ahol az együtthatók egészek a feltétel miatt és $b_0 = f(k)$. Mivel $\frac{p}{q}$ gyöke a polinomnak, így $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, ahol (*p*,*q*)=1.

Ekkor

$$0=f\left(\frac{p}{q}\right)=b_n\left(\frac{p}{q}-k\right)^n+b_{n-1}\left(\frac{p}{q}-k\right)^{n-1}+\ldots+b_1\left(\frac{p}{q}-k\right)+b_0$$

$$0=q^n\left(b_n\left(\frac{p}{q}-k\right)^n+b_{n-1}\left(\frac{p}{q}-k\right)^{n-1}+\ldots+b_1\left(\frac{p}{q}-k\right)+b_0\right)=$$

$$=b_n\left(p-qk\right)^n+qb_{n-1}\left(p-qk\right)^{n-1}+\ldots+q^{n-1}b_1\left(p-qk\right)+q^nb_0$$

Mivel az első n tag és a baloldal is osztható p-kq-val, ezért az utolsó tag is. Mivel (*p,q*)=1, ezért (p-kq;q)=1, így $\left(p-kq\right)|\,b_0=f(k)$.

A megfordítása is igaz, mely könnyen bizonyítható.

6. Mivel *f(x)* főpolinom, ezért ha van racionális gyöke, akkor az csak egész lehet. Legyen ez a gyök m, tehát *f(m)*=0! Ekkor *f(x)=(x-m) · q(x)*, ahol *q(x)* egész együtthatós polinom. Ekkor *f(k)=(k-m) · q(k), f(k+1)=(k+1-m) · q(k+1), ..., f(k+p)=(k+p-m) · q(k+p-m)*. A *k-m, k+1-m,...,* *k+p-m* egymást követő egész számok és számuk *p+1*. Így van köztük *p+1*-gyel osztható, ami ellentmondás, tehát nincs racionális gyöke f-nek.

7. Tegyük fel, hogy van, legyen $f(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$, ahol az együtthatók egész számok, és *f* legalább elsőfokú.

   Ekkor $f(1)=2^r$, ahol r nemnegatív egész szám. Legyen $q(x)=f(x)-2^r$, ami egy n-edfokú polinom, melynek nem lehet *n* db-nál több gyöke. Így *f(x)* legfeljebb *n* db helyen veheti fel a 2^r értéket, így létezik *k* küszöbérték, hogy ha *s*>*k*, akkor $f(s)\neq 2^r$ .Legyen *m* az *r*+1-nél nem kisebb természetes szám és $a=2^m+1$>*k* . Ekkor az *f*-re tett feltevés miatt $f(a)=2^t$, ahol *t* nem lehet egyenlő *r*-rel, és legyen *q*=min(*t,r*). Így $2^t-2^r=2^q\left(2^{t-q}-2^{r-q}\right)$, ahol a második tényező páratlan, így 2^{q+1} nem osztója a különbségnek. Másrészt $2^t-2^r=f(a)-f(1)$, ami osztható *a*-1-gyel tehát ellentmondásra jutottunk.

8. Ismeretes, hogy p*(z)* - *p(x)* osztható *z – x* –szel. Legyen *z* = *q(x)* = *x* + *p(x)* !
   Ekkor *p(q(x)) – p(x)* osztható *p(x)*-szel, vagyis *p(q(x))* osztható *p(x)*-szel és fokszáma nagyobb a *p(x)* fokszámánál, így felbontásában a második tényező is konstanstól különböző.

9. a) Igen pl. $p(x)=\frac{1}{2}x(x+1)$

   b) Igaz, hisz a $p(x)=ax^2+bx+c$ polinom esetén *c* páros, hisz *p*(0)=*c.* Másrészt *p(1)=a+b+c* és *p(-1)=a-b+c.* Ebből $a=\frac{p(1)+p(-1)-2c}{2}$, ami feltételek miatt egész. Ebből pedig következik, hogy *b* is egész.

   c) Nem, pl. $p(x)=\frac{1}{2}x(x+1)(x+2)$

   d) Igaz, a b) feladathoz hasonlóan belátható.

10. Legyen $p_n(x)=\underbrace{pp\dots p}_{n}(x)$. Könnyű végiggondolni, hogy elég olyan p(x) polinomot keresni, melyre igaz, hogy minden *n* és *k* esetén $\left(p_k(n);n\right)=1$.

    Ha $n=p(0)$, akkor *n*|*p(n),* így legyen *p*(0)=1! Ekkor (*p(n);n*)=1, minden egész *n*-re és p(n)=qn+1. Legyen N=qn+1. Ekkor p(p(n))=p(N). Ha i>0, akkor $(qn+1)^i=q'n+1$, ahol *q'* egész.

    Így tetszőleges $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ polinom esetén $p(N)=QN+a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_0$. Legyen $a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_0=1$, ekkor *N*=*qn*+1-ből *p(N)*=Q_1*n*+1 is adódik. Innen teljes indukcióval kapjuk, hogy $p_k(n)=Q_kn+1$, ahol Q_k egész. Ekkor (*n;*p_k(*n*))=1. Így legyen *p*(1)=*p*(0)=1. Tehát a *p*(*x*)=x^{2011}-*x*+1 polinom megfelelő lesz.

11. Az *f(x)*=(2*x*-1)^{2012} polinom megfelel. Ugyanis *f(1-x)=(2(1-x)-1)^{2012}=(1-2x)^{2012}=(2x-1)^{2012}=f(x).*

    A másik kérdésre nem a válasz. Legyen *q(x)=f(x)-f(x-1)*! Ekkor a *q* polinomnak a feltétel szerint végtelen sok gyöke van, ami azt jelenti, hogy a nulla polinom. Ezért *f(x)=f(x-1)* végtelen sok *x*-re. Legyen *b* olyan szám, mely esetén *c=f(b)=f(b-1)=f(b-2)=...,* azaz a *h(x)=f(x)-c* polinomnak végtelen sok gyöke van, tehát a nulla polinom, így *f(x)=c*, ami konstans polinom, tehát nem 2012-edfokú.

II. Polinomegyenletek

1. a) A nulla polinom megfelel a feladatnak. Legyen *p* nem nulla polinom.

   Az egyenlet alapján a *p* polinomnak az x=0 gyöke, tehát *p(x)=x*q_1*(x).* Így az egyenlet

   x(x-1)q_1*(x-1)=(x-5)x*q_1*(x)* alakot ölti. Ebből kapjuk, hogy végtelen sok valós *x*-re fennáll, hogy *(x-1)*q_1*(x-1)=(x-5)*q_1*(x)*. Ebből látszik, hogy *x*=1 gyöke a q_1 polinomnak, így q_1*(x)=(x-1)*q_2*(x)*. Így

   (x-1)(x-2)q_2*(x-1)=(x-5)(x-1)*q_2 *(x),* amiből jön, hogy végtelen sok valós *x*-re

   (x-2)q_2*(x-1)=(x-5)*q_2*(x)...* ezt folytatva egyszerűsítések után a hatodik lépésben eljuthatunk oda, hogy q_6*(x-1)=*q_6*(x)* végtelen sok valós *x* esetén. Ez az előző (I./12.) feladatban látottak alapján azt jelenti, hogy q_6(x) konstans polinom. Tehát ha *p* nem a nulla polinom, akkor *p(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)c*. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk ennek helyességéről.

   b) Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy a 0 polinom, vagy a *p(x)=cx(x-1)(x+1)* polinom.

   c) A 0 polinom, vagy a *p(x)=c(x-2)(x-4)(x-8)(x-6).*

   d) Ha az a) részben látott gondolatmenetet alkalmazzuk, akkor látszik, hogy a p(x) polinomnak gyöke a 0, 1, 2, 3, ... szám, ami azt jelenti, hogy végtelen sok gyöke van. Tehát csak a 0 polinom felel meg az egyenletnek.

III. Gyökök és együtthatók közötti összefüggések, elemi szimmetrikus polinomok

1. Könnyen leellenőrizhetjük, hogy a -1/2 nem lehet gyöke a polinomnak. A p(-2)=0-ból következik, hogy b=10-4a. Ha az x_0 gyök reciproka nem egyenlő x_0-lal, akkor a Viète-formulák alapján b=2, amiből a=2. Ekkor a polinom p(x)=(x+2)(x^2+1), aminek csak egy valós gyöke van. Így legyen x_0 olyan, amely egyenlő a reciprokával!, azaz 1 vagy -1. Behelyettesítés után csak az 1 ad megoldást. A keresett polinom p(x)=x^3+4x^2+x-6, amiről ellenőrzéssel meggyőződhetünk.

2. A Viète-formulák alapján

$$\begin{cases} -(x_1+x_2+x_3+x_4)=-1 \\ x_1x_2+x_3x_4+x_1x_3+x_2x_3+x_4x_2+x_1x_4=-14 \\ x_1x_2x_3+x_4x_1x_3+x_2x_3x_4+x_2x_1x_4=-2 \\ x_1x_2x_3x_4=24 \end{cases},$$

ahol x_1, x_2, x_3, x_4 a négy valós gyök . Legyen $x_1+x_2=0$, így $x_3+x_4=1$. Ebből jön, a második egyenlet alapján, hogy $x_1\,x_2=1$. Ebből pedig már kiszámolhatjuk a gyököket.

3. A Viète-formulák alapján

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2++x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Mivel *a* nullától különböző, ezért $bc<3ad \Leftrightarrow -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}>-3\frac{d}{a}$. Ebbe behelyettesítve a Viète-formulákat és 0-ra redukálva, könnyen bizonyíthatjuk az állítást.

4. Legyenek az adott polinom gyökei x_1, x_2, x_3.

A Viète-formulák alapján

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2++x_1x_3+x_2x_3=-3 \\ x_1x_2x_3=-1 \end{cases}$$

A keresett polinom gyökei: x_1^5, x_2^5, x_3^5.

Annak a Viète-formulái alapján

$$\begin{cases} x_1^5+x_2^5+x_3^5=-a \\ x_1^5x_2^5++x_1^5x_3^5+x_2^5x_3^5=b \\ x_1^5x_2^5x_3^5=-c \end{cases}$$

Ebből c=1.

Innentől használjuk a 10. feladat c) részét!

$$x_1^5+x_2^5+x_3^5=\left(x_1+x_2+x_3\right)^5-5(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

Ebböl kapjuk, hogy

$$x_1^5+x_2^5+x_3^5=0-5(-x_1)(-x_2)(-x_3)((\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{0})^2-(\underbrace{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}_{-3})),$$

$$x_1^5+x_2^5+x_3^5=15$$

azaz a=-15.

Mivel $x_1^5 x_2^5 x_3^5 = 1 \Rightarrow x_2^5 x_3^5 = \frac{1}{x_1^5}$, hasonlóan jön a többi is. Így

$x_1^5 x_2^5 + + x_1^5 x_3^5 + x_2^5 x_3^5 = \frac{1}{x_3^5} + \frac{1}{x_2^5} + \frac{1}{x_1^5}$. Ezt pedig az előző formulából kiszámolhatjuk, ha azt az ott szereplő számok reciprokára írjuk fel. Ebből kapjuk, hogy b=-198.

5. Legyen p, q és r az $x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom három, a feltételeknek megfelelő gyöke. Ekkor a Viéte-formulák felhasználásával: $p + q + r = -a$,
$pq + qr + rp = b$, $pqr = -c$. Világos az is, hogy $b^2 - 4ac$ négyzetszám kell, hogy legyen. Ha p, q és r mindegyike páratlan, akkor a, b és c is az a fenti egyenlőségek miatt. Legyen $a = 2k + 1$, $b = 2m + 1$ és $c = 2n + 1$.
Ekkor
$b^2 - 4ac = (2m+1)^2 - 4\cdot(2k+1)(2n+1) = 4m\cdot(m+1) - 16kn - 8k - 8n - 8 + 5$
, vagyis a kifejezés 8-as maradéka 5. A négyzetszámok közül a páratlanok 8-cal osztva 1 maradékot adnak, így ellentmondásra jutottunk. Ezért p, q és r közül pontosan az egyik 2-vel egyenlő, ami azonnal maga után vonja, hogy
$|p + q + r|$ 2-nél nagyobb páros egész szám, tehát összetett.

6. Legyenek a gyökök x_1, x_2, x_3, x_4. A Viéte-formulák miatt: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$,
$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_3x_4 = -2$. Mivel
$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_3x_4)$, ezért
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$. Tegyük fel indirekt, hogy pl. $\sqrt{3} \le |x_4|$! Ekkor
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 - x_4^2 \le 1$. A számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség miatt
$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} \ge \frac{|x_1| + |x_2| + |x_3|}{3} \ge \frac{|x_1 + x_2 + x_3|}{3}$,sőt, a baloldali egyenlőtlenségben egyenlőség sem állhat fenn, hiszen a gyökök különbözőek. Ezért $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{|x_1 + x_2 + x_3|}{3}$,
$\sqrt{3} > |x_1 + x_2 + x_3| = |x_4|$, ami ellentmondás. Ezzel a feladat állítását beláttuk, hiszen az x_i-k egyenrangúak.

7. Könnyen végiggondolható, hogy $h_1 = s_1$, $h_2 = s_1^2 - 2s_2$.

Legyen a $p(x) = x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3$ harmadfokú polinom három valós gyöke x_1, x_2, x_3 . Ekkor

$$0 = x_1^3 - s_1x_1^2 + s_2x_1 - s_3$$
$$0 = x_2^3 - s_1x_2^2 + s_2x_2 - s_3 \text{ .(1)}$$
$$0 = x_3^3 - s_1x_3^2 + s_2x_3 - s_3$$

Adjuk össze a három egyenlőséget! Ekkor kapjuk, hogy
$h_3 = s_1h_2 - s_2s_1 + 3s_3 = s_1^3 - 3s_2s_1 + 3s_3$

Ha az (1)-es egyenleteit megszorozzuk rendre az x_1, x_2, x_3-mal, majd az így kapott kifejezéseket összeadjuk, kapjuk, hogy $h_4 = s_1h_3 - s_2h_2 + s_3s_1 = s_1^4 - 4s_2s_1^2 + 4s_3s_1 + 2s_2^2$. Ha az (1.) egyenleteit a gyökök négyzetével szorozzuk végig és utána adjuk össze az egyenleteket, akkor megkapjuk a
$h_5 = s_1h_4 - s_2h_3 + s_3h_2 = s_1^5 - 5s_2s_1^3 + 5s_3s_1^2 + 5s_1s_2^2 - 5s_2s_3$.

8. Végig gondolható, hogy $h_3 = s_1^3 - 3s_2s_1 + 3s_3$.
9. Végig gondolható, hogy $h_4 = s_1^4 - 4s_2s_1^2 + 4s_3s_1 + 2s_2^2 - 4s_4$
10. A 7. feladatban kiszámolt polinomok segítségével könnyen igazolható mindhárom kifejezés, ha felhasználjuk, hogy $(x+y)(y+z)(z+x) = s_2s_1^3 - s_3s_1^2 - s_1s_2^2 + s_2s_3$.
11. Alkalmazzuk a 10./a)-t és b)-t! Vegyük figyelembe, hogy x-y+y-z+z-x=0!
12. Az $(a+b-c)^3 + (a-b+c)^3 + (c+b-a)^3$ kifejezésre alkalmazzuk a 10/a feladatban szereplő formulát! Az eredmény 24*abc*.
13. Használjuk fel a 10/a összefüggést és a feltételt. Ezekből kapjuk, hogy
$4(a^3+b^3+c^3-3abc) = 4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
Így elég azt belátni, hogy $4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \geq 3(a-b)^2$. Elvégezve a négyzetre emelést és a nullára redukálást az eredetivel ekvivalens $(a+b)^2 - 4(a+b)c + 4c^2 \geq 0$ egyenlőtlenséghez jutunk. A feltétel alapján *a*+*b*=1-*c*, így elég azt belátni, hogy $(1-c)^2 - 4(1-c)c + 4c^2 \geq 0$. Ebben elvégezve az átalakításokat, az eredetivel ekvivalens $(3c-1)^2 \geq 0$ triviális egyenlőtlenséghez jutunk. Egyenlőség: $\Leftrightarrow \; c = \frac{1}{3}$.
14. Használjuk fel a 10./a) összefüggést és azt, hogy
$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz + zx = \dfrac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2}$, és vizsgáljuk meg az xyz szorzat paritását!
15. Írjuk át feltételt : $x^3 + y^3 + (-1)^3 - 3xy(-1) = 0$, majd erre alkalmazzuk a 10./a)-t! Az eredmény x=y=-1.
16. A baloldali nevezők helyére írjuk be az y+z=-x, z+x=-y és x+y=-z kifejezéseket, majd a nevezők beszorzásával alakítsuk ekvivalensen a kifejezést, miközben háromtagú teljes négyzetek kialakításával és a feltétel felhasználásával haladhatunk előre.
17. Használjuk fel a 10./a és c) feladatot és a feltételt, majd háromtagú teljes négyzet kialakításával és a feltétel felhasználásával megkapjuk, hogy $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6}{5}$.
18. A feladat könnyen megoldható a 10./c) és a Viéte -formulák felhasználásával.
19. A nevezőkkel való beszorzás és nullára redukálás után használjuk a 10./a) feladatot, majd a kapott kifejezésben alakítsuk ki három kéttagú teljes négyzet összegét!

20. A 10./a) és c) feladatok alkalmazása után egy kis átalakítással az eredetivel ekvivalens $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ triviális egyenlőtlenséget kapjuk.
21. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy *a* a legnagyobb oldal. Köbre emelés és nullára redukálás után az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk, melynek baloldalát hozzuk $(-a)^3+b^3+c^3-3(-a)bc$ alakra, melyre alkalmazzuk a 10./a)-t. Innen pedig könnyen befejezhető a bizonyítás.
22. Használjuk fel a 9. feladat eredményét és a $h_2 = s_1^2 - 2s_2$ összefüggést!
23. a), b) Közös nevezőre hozás után a számlálóban elvégezve az összevonást 0-t kapunk, azaz $S_0=S_1=0$.

    c) Közös nevezőre hozás után a számlálóban a $a^2c-a^2b+b^2a-cb^2+c^2b-c^2a$ kifejezést kapjuk, melynek szorzatalakja (*a*-*b*)(*b*-*c*)(*c*-*a*), így $S_2=1$.

    d) Közös nevezőre hozás után a számlálóban a $-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)$ kifejezéshez jutunk. Alakítsuk ezt szorzattá!

    $$-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)=b(c^3-a^3)-b^3(c-a)-ac(c^2-a^2)=$$
    $$=(c-a)(bc^2+abc+ba^2-b^3-ac^2-a^2c)=(c-a)(ac(b-c)-b(b^2-c^2)+a^2(b-c))=$$
    $$=(c-a)(b-c)(ac-b^2-bc+a^2)=(c-a)(b-c)(ac+ab-ab-b^2-bc+a^2)=$$
    $$=(c-a)(b-c)(a(a+b+c)-b(a+b+c))=(c-a)(b-c)(a-b)(a+b+c)$$

    Így $S_3=a+b+c$, azaz egész.

    Nézzünk erre egy másik megoldást, ami lehetőséget nyújt arra, hogy könnyen bebizonyítsuk 4-re, majd tetszőleges pozitív egész *n*-re.
    Tekintsük az alábbi harmadfokú polinomot!

    $$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

    Ennek a polinomnak az *a, b, c* gyöke, ezért

    $$P(a)=a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0$$
    $$P(b)=b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0$$
    $$P(c)=c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0$$

    Ezeket rendre megszorozva $\frac{1}{(a-b)(b-c)}$, $\frac{1}{(b-c)(c-a)}$, $\frac{1}{(c-a)(a-b)}$ kifejezésekkel, majd a kapott egyenleteket összeadva az $S_3-(a+b+c)S_2+(ab+bc+ca)S_1-abcS_0=0$ Összefüggéshez jutunk, melyből kapjuk, hogy $S_3=a+b+c$.

    e) Ehhez a $P(x)=x(x-a)(x-b)(x-c)=x^4-(a+b+c)x^3+(ab+bc+ca)x^2-abcx$ polinomból induljunk ki. Megint írjuk fel az *a, b, c* helyen vett helyettesítési értékét, majd rendre szorozzuk be a kapott egyenleteket $\frac{1}{(a-b)(b-c)}$, $\frac{1}{(b-c)(c-a)}$, $\frac{1}{(c-a)(a-b)}$ kifejezésekkel és adjuk össze azokat! Ekkor az $S_4-(a+b+c)S_3+(ab+bc+ca)S_2-abcS_1=0$ egyenlőséghez jutunk, melyből $S_4=(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)$, tehát egész.

    f) Bizonyítsuk teljes indukcióval!
    Az *n*=0, 1, 2, 3, 4 esetekben már láttuk, hogy igaz az állítás. Tegyük fel, hogy *n*=*k*-ig igaz, bizonyítsuk be *k*+1-re!
    Ehhez tekintsük a

    $$P(x)=x^{k-2}(x-a)(x-b)(x-c)=x^{k+1}-(a+b+c)x^k+(ab+bc+ca)x^{k-1}-abcx^{k-2}$$

Írjuk fel az *a, b, c* helyen vett helyettesítési értékét, majd rendre szorozzuk be a kapott egyenleteket $\frac{1}{(a-b)(b-c)}$, $\frac{1}{(b-c)(c-a)}$, $\frac{1}{(c-a)(a-b)}$ kifejezésekkel és adjuk össze azokat! Ekkor az $S_{k+1}-(a+b+c)S_k+(ab+bc+ca)S_{k-1}-abcS_{k-2}=0$ egyenlőséghez jutunk, melyből $S_{k+1}=(a+b+c)S_k-(ab+bc+ca)S_{k-1}+abcS_{k-2}$. Mivel az indukciós feltétel szerint a jobb oldal egész, ezért az S_{k+1} is egész. Ezt kellett bizonyítani.

24. a) Legyen $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$! Ebből $a-\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=0$. Alkalmazzuk erre a 10./a)-t úgy, hogy $x=a,\ y=-\sqrt[3]{2+\sqrt{5}},\ z=-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Ekkor az $a^3+3a-4=0$ egyenlethez jutunk, melynek csak a=1 a valós megoldása, így $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$, azaz racionális.

    b) Az előzőhöz hasonlóan járhatunk el. Így kapjuk, hogy $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=6$, azaz racionális.

25. Feltehetjük, hogy a, b, c relatív prím egész számok. Ezt érdemes végiggondolni!

    Alkalmazzuk a 10./a) feladatot úgy, hogy x=a, $y=b\sqrt[3]{2}$, $z=c\sqrt[3]{4}$, ekkor *x*+*y*+*z*=0, így $x^3+y^3+z^3=3xyz$, ebből $a^3+2b^3+3c^3=6abc$. Könnyű látni, hogy *a* páros, legyen a=2a$_1$. Ezt beírva a b-re is azt kapjuk, hogy páros, majd azt is felírva 2b$_1$ alakban a C-ről is azt kapjuk, hogy páros, ami ellentmondás.

26. Használjuk fel az előző feladat eredményét!

27. a) Alakítsuk át az egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x+y+z=-\frac{1}{2} \\ xy+yz+zx=-\frac{13}{2} \\ xyz=-3 \end{cases}$$

Az egyenletben a $p(U)=U^3+\frac{1}{2}U^2-\frac{13}{2}U+3$ harmadfokú polinom Viéte –formulái szerepelnek, melynek gyökei x, y, z. Emiatt ezen polinom gyökei adják az egyenletrendszer megoldásait. Arról könnyű meggyőződni, hogy az ½ gyöke. Ezután kiszámolhatjuk a többit, melyek a -3 és a 2. Tehát x=1/2, y=-3, z=2 megoldások és ezek bármely permutációja is megoldás.

b) A $h_2=s_1^2-2s_2$ összefüggésből megkaphatjuk, hogy xy+yz+zx=-11. Innen a harmadik egyenlet felhasználásával jön, hogy xyz=12. Így a $p(U)=U^3-2U^2-11U+12$ harmadfokú polinom Viéte –formuláit kapjuk, melynek gyökei x,y,z. Ennek egyik gyöke 1, a többi ezután könnyen kiszámolható. A megoldások 1, -3, 4 és ezek bármely permutációja.

c) A $h_3 = s_1^3 - 3s_2s_1 + 3s_3$ és a $h_2 = s_1^2 - 2s_2$ összefüggések felhasználásával megkapjuk, hogy xy+yz+zx=-28 és xyz=-60. Így a harmadfokú polinom a $p(U) = U^3 - 3U^2 - 28U + 60$.

A polinom gyökei 2, -5, 6. Ezek bármely permutációja megoldása az egyenletrendszernek.

A d) és e) feladatoknál az előzőekhez hasonlóan járhatunk el.

f) A $h_3 = s_1^3 - 3s_2s_1 + 3s_3$ és a $h_5 = s_1^5 - 5s_2s_1^3 + 5s_3s_1^2 + 5s_1s_2^2 - 5s_2s_3$ alapján az egyenletrendszer az alábbi alakban írható le.

$s_1 = 1$,

$s_1^3 - 3s_2s_1 + 3s_3 = 91$,

$s_1^5 - 5s_2s_1^3 + 5s_3s_1^2 + 5s_2^2s_1 - 5s_2s_3 = 4651$

Az első és második egyenletből kapjuk, hogy $s_2 - s_3 = -30$. Az első és harmadik egyenletből pedig jön, hogy $1 - 5(s_2 - s_3) + 5s_2(s_2 - s_3) = 4651$. Felhasználva, hogy $s_2 - s_3 = -30$, kapjuk az $s_2 = -30$ egyenlőséget. Ebből $s_3 = 0$.

Tehát

$x + y + z = 1$

$xy + yz + zx = -30$

$xyz = 0$

Ebből következik, hogy valamelyik ismeretlen 0. Mivel mindhárom egyenlet szimmetrikus, így legyen x=0! Ekkor az

$y + z = 1$ és $yz = -30$

Ennek a megoldásai y=6, z=-5, valamint y=-5, z=6. Ehhez hasonlóan kapjuk y=0, ill. z=0 esetén a megoldásokat.