Szerkesztések

Csorba Ferenc, Győr

A geometriai szerkesztések elmélete a geometria legklasszikusabb kérdései közé tartozik. Az előadásomban szerkesztésekkel (ill. szerkesztéselméleti problémákkal) foglalkozom, éppen ezért tisztázni kell, mit értünk szerkesztésen. A szerkesztés egy szép játék, egy síkbeli alakzatot bizonyos adatok alapján megrajzolhatunk. Ehhez szükséges, hogy elegendő, ellentmondást nem tartalmazó adat álljon rendelkezésünkre, s a kellő eszközök birtokában legyünk.

Egy-egy szerkesztésbeli eljárást azzal jellemezhetünk, hogy megmondjuk milyen eszközök, és milyen lépések szerepelhetnek. Rendkívül körülményes volna azonban, ha minden szerkesztési feladatnál külön meg kellene mondanunk, hogy milyen eszközök és milyen lépések használatát engedjük meg. Ezen a területen egyértelmű megállapodás jött létre, i.e. 300 körül Euklídesz Elemek című művében rögzítette azt. Megállapodhatunk abban, hogy a két legegyszerűbb eszközt, a körzőt és a vonalzót engedélyezzük. Feltesszük, hogy a vonalzónk tetszőleges hosszú, a körzőnket pedig tetszőlegesen nagyra (vagy kicsire) nyithatjuk. Eszközeinket a következő értelemben használhatjuk:

1. A vonalzót két adott ponthoz illesztve megrajzolhatjuk a két ponton átmenő egyenest.
2. Két adott pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.
3. Adott pont körül adott körzőnyílással kört szerkeszthetünk.
4. Két metsző egyenes metszéspontját kijelölhetjük.
5. Egy kör és az azt metsző egyenes mindkét metszéspontját megkereshetjük.
6. Két, egymást metsző kör mindkét metszéspontját kijelölhetjük.

Ha egy szerkesztés a most felsorolt hat lépés véges sokszori alkalmazásával végezhetünk, akkor euklídeszi szerkesztésről beszélünk.
Axiomatikus tisztasággal euklídeszi szerkesztésnek az olyan eljárást nevezzük, amelynél az adatokból kiindulva úgy jutunk el a kívánt alakzathoz, hogy közben

a) Csak olyan pontot szerepeltetünk, amely két ismert egyenes, vagy két ismert kör, vagy pedig egy ismert egyenes és egy ismert kör metszéspontja.
b) Csak olyan egyenest szerepeltetünk, amelyiknek két pontja ismert.
c) Csak olyan kört szerepeltetünk, amelynek ismert a középpontja és sugara két ismert pont távolsága

Ki kell ezt még egészítenünk azzal, hogy felvehetjük a sík két, semmiféle előírással meg nem kötött pontját. Szükség van erre a kiegészítésre, mert a szerkesztéseknél gyakran előfordul, hogy felhasználunk önkényesen felvett pontokat is (különben el sem indulhatnánk. Pl. a következő feladatnál: szerkesszünk négyzetet!).

Megadtuk a szerkesztésnél használt eszközöket és azok használatának módját. Felvetődik a kérdés: melyek azok a feladatok, amelyek körző és vonalzó használatával, azaz euklídeszi értelemben megoldhatók! Nem minden feladat oldható meg euklídeszi szerkesztés segítségével. Elegendő a történeti szempontból is érdekes kockakettőzést, szögharmadolást, a kör négyszögesítését vagy a szabályos hétszög szerkesztését említenünk.

Annak eldöntésére, hogy egy feladat euklídeszi értelemben megoldható vagy sem, az algebra ad általános módszert. Igaz a következő tétel:

Egy derékszögű koordinátarendszerben adott pontokból azok és csak azok a pontok szerkeszthetők, amelyeknek koordinátái abban a legszűkebb K számtestben vannak, amely magában foglalja az adatokhoz tartozó pontok koordinátáit és a test bármely pozitív elemének négyzetgyökét.

Lehetséges az eszközöket és a megengedett lépéseket úgy bővíteni, hogy ezáltal a megoldható feladatok köre is bővüljön. (Kiterjeszthetjük pl. a vonalzó használatát, új eszközök igénybe vételét engedhetjük meg.) Ezek használata esetén eljárásunk természetesen már nem euklídeszi.

Sokkal érdekesebb, nagyon régóta foglalkoztatta a matematikusokat az a probléma, hogy az euklídeszi szerkesztéseket hogyan lehet megoldani az egyik segédeszköz korlátozott használatával.

Később olyan szerkesztéseket próbáltak megadni, amelyek az egyik eszköz (körző vagy vonalzó) kizárólagos használatával is elvégezhetők.

Georg Mohr „Euklides Danicus” című műve 1672-ben jelent meg Amsterdamban dán és holland nyelven anélkül, hogy figyelmet keltett volna. A mű első részében a szerző az Euklídesz-féle Elemek első hat könyvében előforduló összes szerkesztési feladatot csupán körző használatával megoldja. Mohr műve csak 1928-ban jelent meg újra Koppenhágában, eredeti dán nyelven, amelyhez Pál Gyula német fordítását csatolták.

Csak 125 évvel az Euklídesz Danicus megjelenése után közölte Lorenzo Mascheroni híres munkáját Páviában „La geiometria del compasso” címmel. E dolgozat akkor nagy feltűnést keltett, egy év múlva megjelent francia fordításban (állítólag Napóleon is olvasta).

A körző használatának korlátozásával többen is foglakoztak. Érdemes megemlíteni Kitizi Yanagihasz nevét, aki a mindkét oldalról korlátos körzővel elvégezhető szerkesztési feladatokkal foglalkozott. Megmutatta, hogy az euklídeszi szerkesztések a mindekét oldalról korlátos körzővel is megoldhatók.

Lambert, majd Brianchon olyan szerkesztésekkel foglakoztak, amelyek csupán vonalzó használatával megoldhatók. Kiderült, azonban, hogy egyetlen vonalzó nem elegendő.

Körző nélkül, vonalzó kizárólagos használatával csak olyan adatok (alakzatok) szerkeszthetők, melyek algebrai alakja az adatokhoz rögzített koordinátarendszerben racionális. Elvégezhető szerkesztéseinket bővíthetjük, ha megadunk egy kúpszeletet, de még így sem tudunk minden euklídeszi értelemben vett szerkesztési feladatot megoldani.

Elegendő erre a következő, Steinertől származó ellenpélda: Egy adott kör középpontja nem szerkeszthető meg csak vonalzó használatával. Nézzünk erre egy bizonyítást.

Legyen egy derékszögű koordinátarendszerben

$$K(x;y) = (x-a)^2 + y^2 + 1 - a^2 = 0,\ |a| > 1$$

a K kör egyenlete ennek a körnek a síkjában az $x = \frac{1}{x'}$, $y = \frac{y'}{x'}$ helyettesítés kollineációt határoz meg, amely a $c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$, $c^3 x' + c_2 y' + c_1 = 0$ egyeneseket egymásnak felelteti meg. Ez a kollineáció a K kör $(a;0)$ középpontját az $\left(\frac{1}{a};0\right)$ pontba, a K kört pedig önmagába viszi át, mivel a

$$K(x;y) \equiv \left(\frac{1}{x'} - a\right)^2 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2 + 1 - a^2 \equiv \frac{1}{x'^2}\left[(x'-a)^2 + y'^2 + 1 - a^2\right] = \frac{K(x';y')}{x'^2}$$

azonosság miatt a $K(x;y) = 0$ egyenletből a $K(x';y') = 0$ egyenlet következik és megfordítva.

Tegyük fel, hogy van olyan csak vonalzóval elvégezhető szerkesztés, amely bizonyos számú, részben a K körön fekvő pontból, részben más tetszőleges pontból kiindulva a K kör középpontjához vezet. Ennek a szerkesztésnek az előbbi kollineáció a K kör ugyanannyi pontjából és ugyanannyi más pontból kiindulva és ugyanolyan tulajdonságú szerkesztést feletet meg, mint az első szerkesztés. Ez a tisztán vonalzós második szerkesztés azonban az $\left(\frac{1}{a};0\right)$ ponthoz juttat, noha az $(a;0)$ középponthoz kellene vezetnie. Ebből az ellentmondásból következik a tétel igazsága.

Ugyanígy lehet kimutatni a következő tételt:
Ha két alapkör van megrajzolva, de egyiknek sem ismeretes a középpontja, és ha a két kör sem nem metszi (érinti) egymást, sem nem koncentrikus, akkor egyik középpontot sem lehet vonalzóval megszerkeszteni.
Egy vonalzó kevésnek bizonyult, azonban ha meg van adva a rajz síkjában egy (rögzített) kör a középpontjával, akkor ez már elegendő ahhoz, hogy segítségével minden euklídeszi értelemben megoldható feladatot csak vonalzó használatával megszerkesszük az euklídeszi síkon.

Ennek a feladatnak a megoldása Steiner nevéhez fűződik, bár Poncelet, a projektív geometria megalapítója már Steiner előtt ugyanerre az eredményre jutott, igaz tárgyalása túlságosan rövid volt, s műve annak idején csak kevés figyelemben részesült. (Steiner: Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833. és Poncelet: Traité des propriétés projectives des figures, Párizs 1822.)

Azóta többen is foglakoztak a problémával, korlátozták az eszközök használatát (hosszátvivő, egységfordító).
Ezekre a szerkesztési módszerekre jellemző, hogy feltételezik a párhuzamossági axiómát, ezért ezek a szerkesztések a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriában nem használhatók.

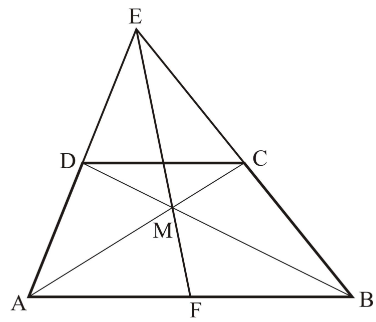
A továbbiakban megmutatom Steiner tételének a bizonyítását.

Tétel:

Ha adott a rajz síkjában egy (rögzített) kör a középpontjával, akkor minden euklídeszi szerkesztés elvégezhető egyetlen (egyélű) vonalzó segítségével.

Bizonyítás:

Meg kell mutatnunk, hogyan tudjuk megadni egy kör és egy egyenes, valamint két kör metszéspontját.
Tekintsük először az alábbi ábrát'



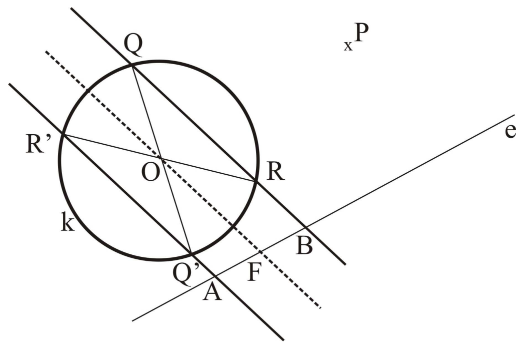
Az *ABCD* trapéz és a *CDE* kiegészítő háromszögről ismert (pl. tankönyvek), hogy az átlók *M* metszéspontját *E*-vel összekötve ez az egyenes az *AB* szakaszt *F*-ben felezi. Ez alapján két alapszerkesztés csak vonalzóval is elvégezhet. Ezek:

A. Adott az *AB* szakasz és *F* felezési pontja.
   Ekkor a sík tetszőleges *C* pontján át párhuzamost szerkeszthetünk az *AB* egyenessel.
B. Ha adott két párhuzamos egyenes, akkor az egyik egyenes tetszőleges *AB* szakaszának *F* felezési pontját megszerkeszthetjük.

1 feladat:

Adott a síkon egy (rögzített) *k* kör az a *O* középpontjával. Szerkesztendő adott *P* ponton át adott *e* egyenessel párhuzamos egyenes.

Megoldás:

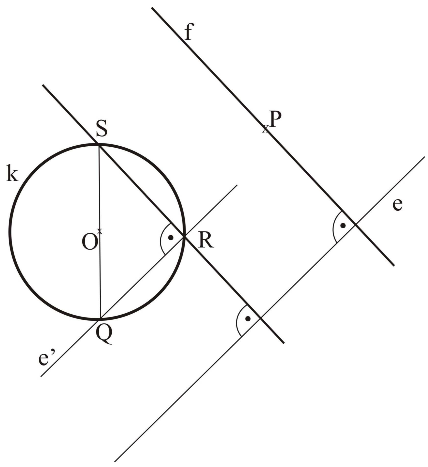


Elegendő lenne kijelölni az *e* egyenesen egy *AB* szakaszt az *F* felezési pontjával, ekkor már az *A* szerkesztés segítségével készen lennénk. Felvehetjük a körön a *Q* és *R* pontokat, ezeket *O*-val összekötve kapjuk a Q' és R' illetve az *e* egyenesen az *A* és *B* pontokat. Mivel $QR \parallel Q'R'$, ezért a *B* szerkesztés segítségével előállíthatjuk *QR* felezési pontját, az *A* szerkesztés segítségével párhuzamost húzhatunk *QR*-rel *O*-n keresztül, ez az egyenes *e*-t *F*-ben metszi. Újra alkalmazhatjuk az *A* szerkesztést, és készen vagyunk.

2. feladat:

Adott a síkon egy *k* kör az O középpontjával. Szerkesztendő adott *P* ponton át adott *e* egyenesre merőleges egyenes.

Megoldás:



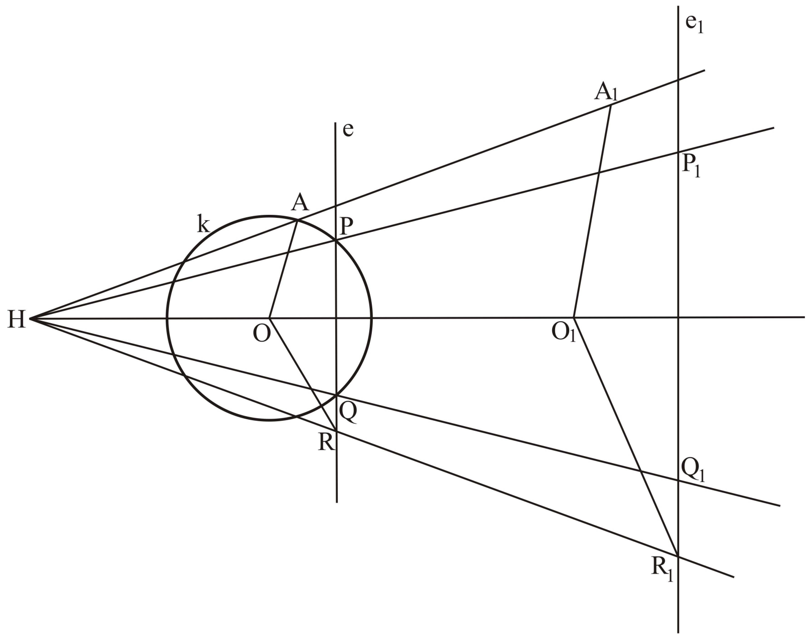
A *k* kör tetszőleges *Q* pontján át húzzunk párhuzamost az *e* egyenessel (e'), ez metszi a kört az *R* pontban. A *QO* egyenes *S*-ben metszi a kört, Thalesz tétele szerint $SR \perp QR$, az *SR*-rel párhuzamos *P*-n átmenő *f* egyenes szerkeszthető.

Ezek után rátérhetünk kör és egyenes metszéspontjainak szerkesztésére. Azt fogjuk kihasználni, hogy bármely két kör középpontosan hasonló.

3. feladat:

Szerkesztendő az O_1 középpontú, O_1A_1 sugarú k_1 kör és az e_1 egyenes mindkét metszéspontja.

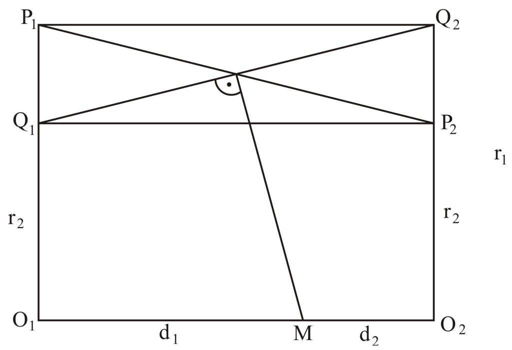
Megoldás:



Párhuzamost húzunk az O-n át az O_1A_1-gyel, ez metszi a k kört A-ban. AA_1 és OO_1 metszéspontja megadja a két kör (külső) hasonlósági pontját. Az e_1 egyenes tetszőleges R_1 pontjának megszerkesztjük az R őrét $(O_1R_1 \parallel OR)$, majd az e_1 egyenes e őrét $(e_1 \parallel e)$. Ez kimetszi k-ból a P és Q metszéspontokat, ezek P_1 és Q_1 képe (könnyen szerkeszthető) adja a k_1 kör és az e_1 egyenes metszéspontját.
Hátra van még két kör metszéspontjának meghatározása.
Az O_1 középpontjával és A_1 pontjával megadott k_1 kör és az O_2 középpontjával és A_2 pontjával megadott k_2 kör metszéspontjainak meghatározását visszavezethetjük az előző feladatra. k_1 és k_2 körök metszéspontjait ugyanis a két kör h hatványvonala metszi ki a k_1 vagy a k_2 körből. Mivel h merőleges a két kör O_1O_2

centrálisára, elegendő megmutatni, hogy a h és az O_1O_2 egyenes M metszéspontja vonalzóval szerkeszthető.

Megszerkesztjük az O_1O_2 egyenesre, ugyanabban a félsíkban az O_1 illetve az O_2 pontban állított merőleges félegyenesek k_1 körrel való P_1, illetve k_2 körrel való P_2 metszéspontját, s azután a $P_1O_1O_2Q_2$ és a $P_2O_2O_1Q_1$ téglalapot. Az O_1O_2 centrális egyenes és a Q_1Q_2 szakasz felezőmerőlegese a keresett M pontban metszi egymást.



Ennek igazolására azt kell megmutatni, hogy az M pontnak a k_1 és a k_2 körre vonatkozó hatványa megegyezik.

(Egy pontnak egy r sugarú körre vonatkozó hatványa $H = d^2 - r^2$, ahol d a pont távolságát jelöli a kör középpontjától.)

$Q_1M = MQ_2$, a Q_1O_1M és az MO_2Q_2 háromszögek derékszögűek, ezért $d_1^2 + r_2^2 = d_2^2 + r_1^2$, $d_1^2 + r_1^2 = d_2^2 + r_2^2$, azaz M rajta van a két kör hatványvonalán.

Ezzel Steiner tételét (pontosabban a Poncelet-Steiner-féle tételt) ebizonyítottuk. Mint említettem, ezeknél a szerkesztéseknél felhasználjuk az euklídeszi párhuzamossági axiómát. A Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriában is elvégezhető minden szerkesztés csak vonalzó használatával, de ott a rögzített, középpontjával megadott körön kívül más feltételekre is szükség van. ilyen pl. egy szakasz a felezőpontjával, vagy két, egymásra merőleges egyenes megadása.

Irodalom:

1. Czédli Gábor – Szendrei Ágnes: Geometriai szerkeszthetőség (Polygon, Szeged, 1997.)
2. Csorba Ferenc és Molnár Emil: Steiner-féle szerkesztések a projektív metrikus síkon (Matematikai Lapok, Budapest, 1986.)
3. Hajós György: Bevezetés a geometriába (Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.)
4. Rademachev – Toeplitz: Számokról és alakzatokról (Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.)
5. Szőkefalvi Nagy Gyula: A geometriai szerkesztések elmélete (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.)