9.C Átvételi vizsga, 2020/2021

Feladatok és megoldásvázlatok

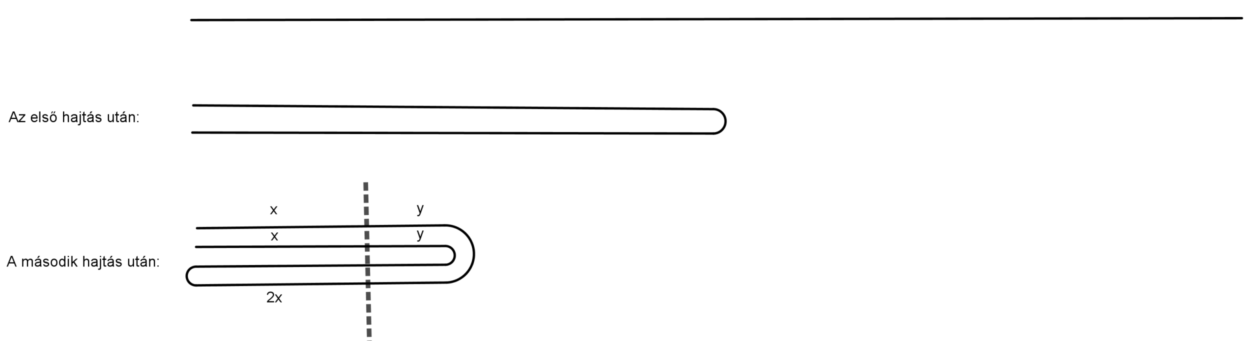
A feladatok megoldására 120 perc áll rendelkezésre. A feladatok megoldásához számológép és elektronikus segédeszköz nem használható. A válaszokat indokolni kell.

1. feladat (6 pont) *Géza megírta ezt az átvételi feladatsort. Csak az első öt feladattal foglalkozott. Külön-külön mind az öt feladattal egész számú percet töltött el, méghozzá úgy, hogy az egyes feladatokkal töltött idők egyenes arányban állnak a feladatokra kapható pontszámokkal. Legkevesebb hány perce maradhatott a végén arra, hogy átnézze a munkáját, ha csak a munkaidő végén adta be a dolgozatát?*

1. feladat megoldás Az első öt feladatra kapható pontok $6; 8; 10; 10; 12$, amik egészekként felírt tovább nem egyszerűsíthető aránya $3 : 4 : 5 : 5 : 6$. Így összesen $(3 + 4 + 5 + 5 + 6) \cdot t$ percet foglalkozott a feladatok megoldásával, ahol t az arányossági tényező, $t \in \mathbb{N}$. Keressük azt a legnagyobb t pozitív egész számot, amire $23 \cdot t \leq 120$. Ez a $t = 5$. Így $120 - 5 \cdot 36 = 5$. Vagyis legalább 5 perce maradt Gézának a dolgozat átnézésére.

2. feladat (8 pont) *Rodolfó, a nagy bűvész az otthonában gyakorolt. Egy madzagot félbe hajtott, majd még egyszer félbe hajtotta. Ezek után egy ollóval átvágta a köteget (nem a végeinél), így öt darabra esett szét. Kiterítette maga elé a darabokat, és azt látta, hogy a részek között van 24 és 16 cm-es darab is. Milyen hosszú lehetett az eredeti madzag?*

2. feladat megoldás Készítsünk egy megfelelő ábrát.



Láthatjuk, hogy a keletkező öt rész háromféle hosszt határoz meg. Ezek $x, 2x$ és y hosszúak. Mivel a 24 és a 16 *cm*-es darabok aránya nem 1:2, ezért az egyik az y-al jelölt hossz lesz. Így négy eset lehetséges:

1. eset $y = 16$ és $x = 24$ *cm*. Ekkor az eredeti hossz $x + x + 2x + 2y = 128$ *cm*

2. eset $y = 16$ és $2x = 24$ *cm*. Ekkor az eredeti hossz $x + x + 2x + 2y = 80$ *cm*

3. eset $y = 24$ és $x = 16$ *cm*. Ekkor az eredeti hossz $x + x + 2x + 2y = 112$ *cm*

4. eset $y = 24$ és $2x = 16$ *cm*. Ekkor az eredeti hossz $x + x + 2x + 2y = 80$ *cm*

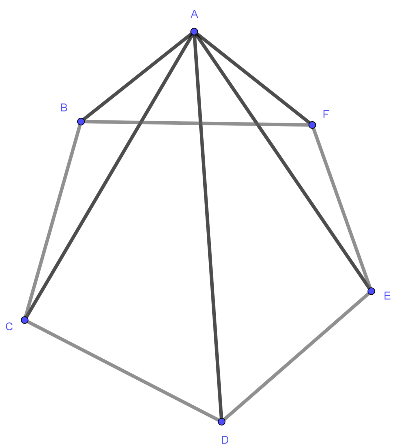
Tehát az eredeti madzag hossza 80, 112, vagy 128 *cm* volt.

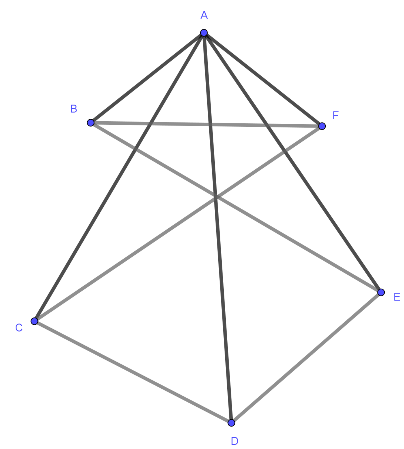
3. feladat (10 pont) *A, B, C, D, E és F egy hattagú társaság tagjai. Tudjuk, hogy A-nak 5 ismerőse van, a többieknek pedig pontosan 3 a társaság tagjai között. (Az ismeretség kölcsönös.) Azt is tudjuk, hogy E és D ismerik egymást.*

a) *Igaz-e, hogy F és C biztosan ismerik egymást?*

b) *Lehetséges-e, hogy B sem F-et, sem C-t nem ismeri?*

3. feladat megoldás A-nak 5 ismerőse van, ez azt jelenti, hogy mindenkit ismer. Innentől tekintsük csak B, C, D, E és F kapcsolatát. Közöttük mindenki pontosan 2 másikat ismer. Ez csak úgy lehetséges, ha ők öten körbeállíthatóak úgy, hogy mindenki csak a két szomszédját ismeri. Ebből fakadóan F és C Akár ismerhetik is egymást, de nem biztos.





Viszont ha B sem f-et, sem C-t nem ismeri, akkor csak E és D lehet az ismerőse, de ekkor F és C is kimaradnak a körből, tehát ez nem lehetséges.

4. feladat (10 pont) *Kati felrajzolta a páros számokat 10-től kezdve egy számháromszögbe úgy, hogy az n. sorban n szám áll.*

$$\begin{array}{c} 10 \\ 12 \;\; 14 \\ 16 \;\; 18 \;\; 20 \\ 22 \;\; 24 \;\; 26 \;\; 28 \\ \ldots \end{array}$$

a) *Melyik szám áll a 10. sorban az 5. helyen?*

b) *Hányadik sor hányadik tagja a 432?*

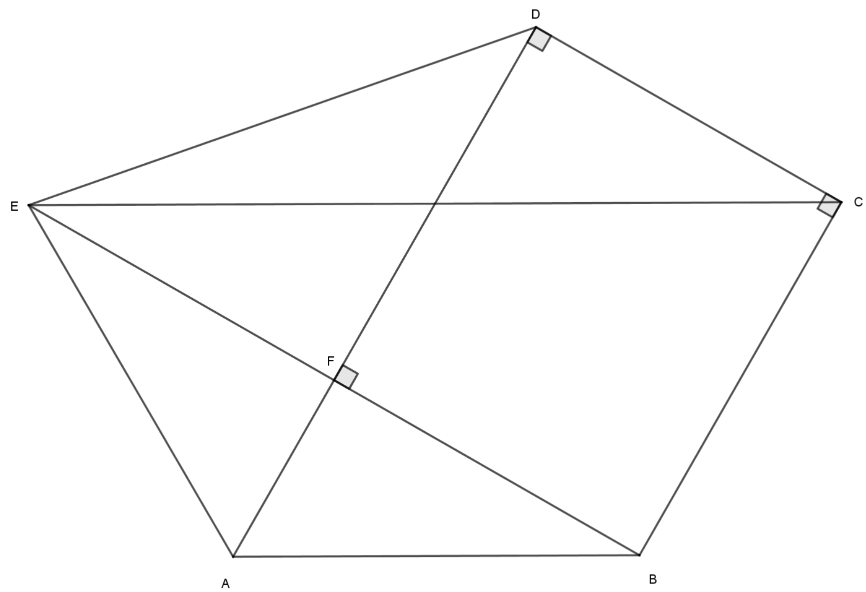
4. feladat megoldás Az n. sor első elemét megkaphatjuk úgy, hogy $10 + (2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + (n-1) \cdot 2)$
Átalakítás után ez $10 + (n-1)n$, kihasználva a kis-Gauss formulát. Így a 10. sor első tagja $10 + 9 \cdot 10 = 100$.
Ebben a sorban pedig az ötödik tag nem más, mint a $100 + (5-1) \cdot 2 = 108$.
A 432 az n. sor k. tagja.
Így teljesül rá, hogy $10 + (n-1) \cdot n \leq 432 \leq 10 + n \cdot (n+1)$.
Vagyis $n^2 - n \leq 422 \leq n^2 + n$.
Ezt az egyenlőtlenséget az $n = 21$ oldja meg.
A 21. sor első tagja $10 + 21 \cdot 20 = 430$, tehát a 432 a 21. sor 2. tagja.

5. feladat (12 pont) *Az $ABCDE$ konvex ötszögről a következőket tudjuk. Az A-nál és B-nél lévő belső szögei $120°$-osak, a C-nél lévő belső szöge derékszög. Valamint $EA = AB = BC = 6cm$, az AD átló pedig merőleges a CD oldalra.*

a) *Milyen hosszú az AD szakasz?*

b) *Bizonyítsuk be, hogy az EAB háromszög területe egyenlő a BCD háromszög területével!*

5. feladat megoldás Készítsünk ábrát!



Mivel CD-re merőleges az AD átló és a BD oldal is, így CD párhuzamos BD-vel, tehát az $ABCD$ négyszög trapéz.
Állítsunk merőlegest a B csúcsból az AD átlóra. A talppontot jelöljük F-el.
$BCDF$ négyszög téglalap, tehát $DF = 6\ cm$.
ABF szög $30°$-os, így az ABF háromszög félszabályos, a rövidebbik befogója AF fele akkora, mint az AB átfogója. $AF = 3\ cm$.
Így az $AD = AF + DF$, $AD = 9\ cm$.

Húzzuk meg az EC átlót.
Mivel Az $ABCE$ négyszög tengelyesen szimmetrikus (Az AB felezőmerőlegesére), így ez egy húrtrapéz.
Tehát AB párhuzamos CE.
Az ABC háromszög területe egyenlő a ABE háromszög területével és a BCD háromszög területével is, hiszen azonosak a megfelelő alapok és a magasságok is.
Így az EAB és a BCD háromszögek területe is egyenlő.

6. feladat (12 pont) *Egy 500×505-ös méretű téglalapot egységnégyzetekből raktunk össze. Hány egységnégyzet belsején halad át a téglalap átlója?*

6. feladat megoldás Képzeljük el, hogy egy hangya végighalad az átló mentén és amikor egy új négyzet belsejébe ér, akkor megszólal egy csengő. A hangya áthalad minden vízszintes és minden függőleges rácsvonalon is. Tehát összesen $499 + 504 = 1003$ rácsvonalon halad keresztül, viszont viszont ezek közül néha egyszer szólal meg csengő, mikor két rácsvonal metszéspontján halad át. Számoljuk meg a rácspontok számát, amiken áthalad a hangya. Osszuk fel 100×101-es téglalapokra. Ekkor látható, hogy egy ilyen téglalap esetén már nem halad át metszésponton, vagyis összesen 4 rácsponton halad át a hangya. Tehát $1003 - 4 + 1 = 1000$ négyzeten halad át, mert az első négyzetet, amiből kiindul még nem számoltuk.