

Feladatok

Fontos információk: Az alábbi feladatok megoldására 120 perced van. A feladatokat tetszőleges sorrendben oldhatod meg. A megoldásokat indokold, a végeredmény közlése csak 1 pont, a többi a magyarázatra kapod. Számológépet, mobiltelefont nem használhatsz (még időmérésre sem).

1. feladat

Zsófi egy szép reggelen hosszú útra indult. Délben a már megtett út úgy aránylott a még hátralevő úthoz, mint 2:3. Délután folytatta útját, megtett még 80 kilométert. Estére a megtett és a hátralevő távolság aránya 6:5 lett. Hány kilométerre tervezte Zsófi az útját, mekkora távolságot tett meg reggeltől estig? (5 pont)

2. feladat

Az a) 1,2,3,4,5,6 b) 0,1,2,3,4,5,6 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer használjuk fel. Létezik-e olyan N pozitív egész szám az a) illetve a b) esetben, amelyre az alábbi állítások mindegyike teljesül:

- Az N számból a 2-es számjegy kihagyásával kapott (eggyel kevesebb számjegyből álló) szám osztható 2-vel.
- Az N számból a 3-as számjegy kihagyásával kapott szám osztható 3-mal.
- Az N számból a 4-es számjegy kihagyásával kapott szám osztható 4-gyel.
- Az N számból az 5-ös számjegy kihagyásával kapott szám osztható 5-tel.
- Az N számból a 6-os számjegy kihagyásával kapott szám osztható 6-tal.

(6 pont)

3. feladat

Egy moziban 7 sor mindegyikében 10 szék van. 50 gyerek ebben a moziban megtekintette A matematika furcsaságai című filmet. Egy hét múlva ugyanezek a gyerekek a Rejtélyes fizika című filmet nézték meg ugyanebben a moziban. Bizonyítsd be, hogy legalább két gyerek ugyanabban a sorban ült a két előadáson! (7 pont)

4. feladat

Az $ABCD$ konvex négyszög A csúcsát a B pontra, B csúcsát C -re, C csúcsát D -re, végül D -t A -ra tükröztük, így kaptuk rendre az A' , B' , C' , D' pontokat. Hányszorosa az $A'B'C'D'$ négyszög területe az $ABCD$ négyszög területének? (8 pont)

5. feladat

Egy szabályos nyolcszög csúcsai közül kiválasztottunk n darabot, majd ezeket összekötve egy olyan konvex n -szöget kaptunk, amelynek nincsenek párhuzamos oldalai. Legfeljebb mekkora lehet n ? (10 pont)

6. feladat

a) Kiszámoltuk az $1,2,\dots,n$ pozitív egész számok összegét. Bizonyítsd be, hogy ha az összeg két szomszédos egész szám szorzata, akkor $n^2 + (n + 1)^2$ négyzetszám!

b) Bizonyítsd be, hogy ha $n^2 + (n + 1)^2$ négyzetszám, akkor 1-től n -ig a pozitív egész számok összege felírható két szomszédos egész szám szorzataként!

(7 + 7 pont)

Budapest, 2017. január 18.